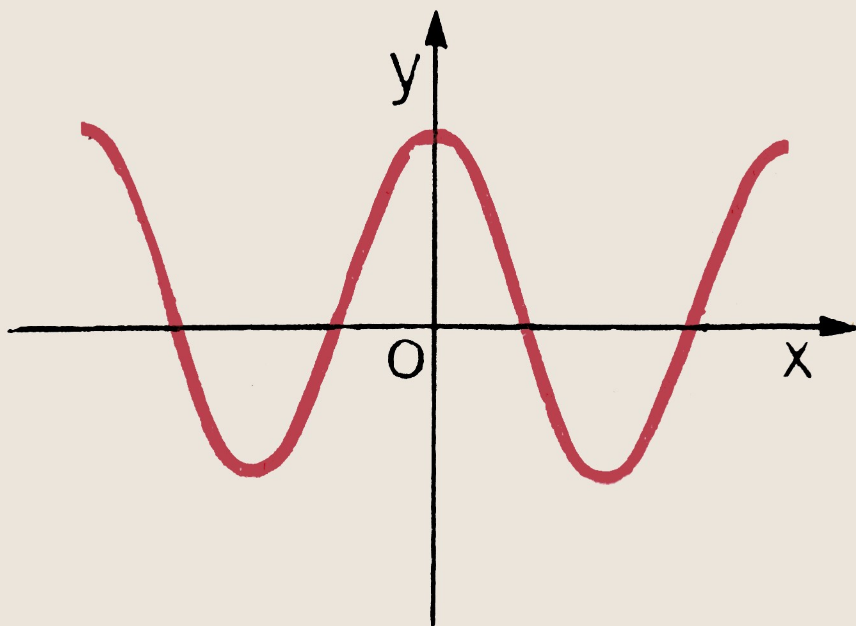
B. Godvaiša
R. Šileikienė
J. Šinkūnas

MATEMATIKA

1



B. Godvaiša
R. Šileikienė
J. Šinkūnas

MATEMATIKA

1



VILNIUS „MOKSLAS“ 1992

UDK 512(075.32)
Go-51

Leidinį recenzavo fiz. ir mat. kandidatai
A. NAGELĖ, E. NENIŠKYTĖ ir A. SKŪPAS

ISBN 5—420—00571—9 (I d.)
ISBN 5—420—00572—7

PRATARMĖ

Šis vadovėlis skiriamas specialiųjų vidurinių mokyklų moksleiviams, baigusiems 9 arba 12 vidurinės mokyklos klasių. Įvairiose mokyklose matematika dėstoma vadovaujantis gana skirtingomis programomis. Į tai buvo atsižvelgta rašant vadovėlį, todėl jo medžiaga gali būti platesnė už konkrečios mokyklos programą. Be to, jame gvildenamos kai kurios temos, be kurių, autorių nuomone, negalima išsiversti dėstant tolesnę programinę medžiagą (pvz., kai kurių lygčių sprendimas, vektoriai).

Pirmoji vadovėlio dalis skiriama moksleiviams, baigusiems 9 klases.

Aiškinamoji medžiaga iliustruojama pratimais. Dažnai įrodymuose remiamasi intuicija ir vaizdumu.

Kiekvieno skyriaus gale pateikiama pratimų ir uždavinių, reikalingų to skyriaus teorinei medžiagai įtvirtinti. Be įprastinės kartojamosios medžiagos, yra ir pratimų, skirtų labiau besidomintiems matematika moksleiviams. Pratimų ir uždavinių atsakymai nurodomi taip pat skyriaus gale.

3, 4, 5 skyrius parašė B. Godvaiša, 1, 7, 8 skyrius — R. Šileikienė, 2, 6, 9 skyrius — J. Šinkūnas.

Nuoširdžiai dėkojame recenzentams E. Neniškytei, A. Nagelei ir A. Skūpui, kruopščiai peržiūrėjusiems rankraštį ir pateikusiems vertingų pasiūlymų.

Skaitytojams būsime dėkingi už kritines pastabas ir pasiūlymus. Juos siųskite šiuo adresu: „Mokslo“ leidykla, Žvaigždžių 23, 2050 Vilnius.

Autoriai

1. ĮVADAS

Matematika — vienas iš seniausių mokslų. Pirmosios matematikos sąvokos formavosi jau pirmykštėje žmonių visuomenėje. Iš kasdienės patirties radosi sąvokos „daugiau“, „mažiau“, „lygu“, pradėta suvokti trumpiausią atstumą tarp dviejų taškų. Skaičiavimai su sveikaisiais skaičiais siekia tą žmonijos istorijos laikotarpį, iš kurio nėra jokių rašytinių žinių.

Žemės plotų matavimas, prekyba, navigacija, valstybės valdymas, statyba skatino tobulinti aritmetinius skaičiavimus, gilinti geometrijos žinias. Tautos, pasiekusios panašią visuomenės raidos stadiją, būdavo sukaupusios ir gan panašias matematikos žinias. Pavyzdžiui, senovės Babilonijoje ir senovės Egipte figūrų plotai buvo skaičiuojami pagal tas pačias taisykles kaip ir senovės Kinijoje. Ir babiloniečiai, ir kiniečiai dar gerokai prieš Pitagorą žinojo kai kurių stačiųjų trikampių kraštinių sąryšius.

Nuo seniausių laikų matematika buvo naudojamasi jai artimose mokslo šakose — fizikoje, astronomijoje, chemijoje. Šiandien be matematikos neišsiverčia ekonomika, biologija, agronomija, medicina, istorija, sociologija, lingvistika — beveik visos mokslo šakos. Matematiniais metodais ir elektroninėmis skaičiavimo mašinomis naudojamasi visose žmonijos veiklos srityse.

Paskutiniaisiais dešimtmečiais atsirado naujos svarbios matematikos šakos: atsitiktinių procesų teorija, informacijos teorija, optimalių sprendimų teorija, matematinė statistika, sparčiai plėtojosi matematikos kryptys, susijusios su elektroninių skaičiavimo mašinų naudojimu. Šiandien kuriami matematiniai modeliai, kurie sėkmingai taikomi tiriant ir projektuojant įvairias sudėtingas sistemas — statybines konstrukcijas, techninius ir technologinius įrengimus, biologines sistemas, valdant gamybos technologinius procesus ar visą gamybą ir kitur.

Beje, ne visos matematikos teorijos buvo greitai ir efektyviai pritaikomos — kai kurios jų dešimtmečiais ar net šimtmečiais pralenkė technikos raidą ir galimybes.

Lietuvoje jau nuo XV a. pabaigos parapijinėse mokyklose buvo mokoma skaičiavimo. 1539 m. A. Kulviečio Vilniuje įkurtoje reformatų mokykloje tarp „septynių laisvųjų menų“ buvo aritmetika ir geometrija. XVI a. antroje pusėje jėzuitų kolegijoje matematika buvo dėstoma kaip filosofijos dalis. 1579 m. įkurtas Vilniaus uni-

versitetas paspartino matematikos mokslo plėtotę. XVII a. pirmoje pusėje Vilniaus universitete susiformavo O. Krygerio vadovaujama matematikos taikymo mokykla, sprendusi optikos, astronomijos, mechanikos ir balistikos problemas. Šiuo laikotarpiu paskelbti veikalai lotynų kalba: Vilniaus universiteto auklėtinio J. Rudaminos „Žymiosios matematikos teoremos ir problemos" (1633 m.), O. Krygerio „Naujai nustatytos ir praktiškai patikrintos horoskopinės karo pabūklų taiklumo paralelės" (1636 m.), K. Simonavičiaus „Didysis artilerijos menas" (1650 m.).

Žymiausi XVIII a. pabaigos universiteto matematikai — K. Počobutas ir P. Norvaiša. P. Norvaiša pradėjo skaityti aukštosios matematikos kursą bei tikimybių teorijos elementus. XIX a. matematiko Z. Revkovskio darbai iš tikimybių teorijos ir jos taikymų buvo žinomi visoje Europoje.

1919—1940 m. Kauno ir Vilniaus universitete matematiką dėstė Z. Žemaitis, V. Biržiška, O. Folkas, O. Stanaitis, P. Katilius. Mokslinis darbas buvo plėtojamas specialiųjų funkcijų, kreivių tinklų, matematikos istorijos srityse.

Mokslinė matematikų veikla Lietuvoje ypač suaktyvėjo nuo 1956 m., įsteigus Fizikos ir matematikos institutą. Matematikos tyrimams vadovavo tuometinis instituto direktoriaus pavaduotojas mokslo reikalams, ilgametis Vilniaus universiteto rektorius, akademikas, profesorius J. Kubilius. Jo monografija „Tikimybiniai metodai skaičių teorijoje" laikoma naujos matematikos šakos — tikimybinės skaičių teorijos — pradžia.

1962 m. akademiko A. Jucio iniciatyva įkurtas Mokslų akademijos skaičiavimo centras. 1977 m., reorganizavus Fizikos ir matematikos institutą, įkurtas Matematikos ir kibernetikos institutas, vadovaujamas akademiko V. Statulevičiaus. Instituto mokslininkų gauti rezultatai plačiai naudojami praktikoje.

Lietuvos matematikų darbais domisi įvairių šalių mokslininkai. Lietuvoje kas ketveri metai rengiamos tarptautinės konferencijos tikimybių teorijos ir matematinės statistikos klausimais.

1961 m. Lietuvos matematikai pradėjo leisti mokslinį žurnalą „Lietuvos matematikos rinkinys", kuris nuo 1974 m. verčiamas į anglų kalbą ir spausdinamas JAV.

Daug matematikų šiuo metu dirba ne tik Matematikos ir kibernetikos institute, Vilniaus universitete, bet ir kitose mokslo įstaigose bei aukštosiose mokyklose.

2. REALIEJI SKAIČIAI. APYTIKSLIS SKAIČIAVIMAS

2.1. Realieji skaičiai

2.1.1. Realiųjų skaičių apibrėžimas. Visi gerai žinome natūrinius skaičius 1, 2, 3,... Jų aibė N yra begalinė. Šioje aibėje visada galime atlikti dvi operacijas: sudėtį ir daugybą. Tačiau atvirkštiniai veiksmai — atimtis ir dalyba — ne visada galimi. Jeigu prie natūrinių skaičių aibės prijungsime *nulį* ir *sveikuosius neigiamus skaičius* -1, -2, -3,..., tai gausime *sveikųjų skaičių aibę* Z. Iš šios aibės vieno skaičiaus visada galime atimti kitą skaičių. Tačiau dalyba ne visada galima. Pavyzdžiui, negalime apskaičiuoti dalmens $(-3):5$. Sveikųjų skaičių aibę papildysime naujais — *trupmeniniais skaičiais.*

Skaičius, išreiškiamas trupmena $\frac{m}{n}$, m — sveikasis skaičius, o n — natūrinis, vadinamas *racionaliuoju skaičiumi.* Pavyzdžiui, $2\frac{1}{3}$ ir -2 yra racionalieji skaičiai, nes

$$2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=\frac{14}{6}=\frac{28}{12}=\ldots$$

$$-2=\frac{-2}{1}=\frac{-4}{2}=\frac{-8}{4}=\ldots$$

Iš pateiktų pavyzdžių išplaukia, kad racionalųjį skaičių atitinka be galo daug trupmenų. Tarp tų trupmenų galime nurodyti trupmeną su mažiausiu vardikliu. Ši trupmena nesuprastinama.

Taikydami dalybos algoritmą, bet kurį racionalųjį skaičių galime išreikšti dešimtaine trupmena. Vieni racionalieji skaičiai išreiškiami baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis, pavyzdžiui,

$$\frac{1}{2}=0{,}5,\quad \frac{2}{5}=0{,}4, -\frac{1}{80}=-0{,}0125,$$

kiti — begalinėmis dešimtainėmis trupmenomis:

$$\frac{4}{3}=1{,}333\ldots, -\frac{5}{11}=-0{,}454545\ldots, \frac{3}{14}=0{,}2142857142857\ldots$$

Tokios begalinės dešimtainės trupmenos vadinamos *periodinėmis*, o pasikartojanti skaitmenų grupė — *trupmenos periodu.* Periodinės trupmenos užrašomos šitaip:

$$\frac{4}{3}=1,(3), -\frac{5}{11}=-0,(45), \quad \frac{3}{14}=0{,}2(142857).$$

Trupmena $1,(3)$ vadinama *grynąja periodine* trupmena, o trupmena $0,2(142857)$ — *mišriąja periodine* trupmena. Trupmenos $1,(3)$, $0,2(142857)$ yra *teigiamos*, o trupmena $-0,(45)$ — *neigiama*.

Baigtinę dešimtainę trupmeną galima išreikšti begaline dešimtaine periodine trupmena prirašant jos dešiniojoje pusėje begalinę seką nulių. Pavyzdžiui,

$$3,56=3,56000...=3,56(0).$$

Kai $n=1$, racionalusis skaičius yra sveikasis. Jo periodu galime laikyti 0:

$$-\frac{5}{1}=-5=-5,000...=-5,(0).$$

Taigi *kiekvieną racionalųjį skaičių galima išreikšti periodine trupmena.*

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: *kiekviena begalinė dešimtainė periodinė trupmena reiškia tam tikrą racionalųjį skaičių.*

Pavyzdys. Rasime racionalųjį skaičių, išreiškiamą periodine trupmena: 1) $0,(23)$; 2) $2,(173)$; 3) $0,2(37)$; 4) $-3,(19)$.

1) Sakykime, $x=0,(23)=0,232323...$ Padauginkime šią lygybę iš tokio skaičiaus, kad dešiniojoje pusėje gautume skaičių, kurio sveikoji dalis būtų lygi trupmenos periodui. Kadangi periode yra du skaitmenys, tai dauginsime iš šimto:

$$100x=23,(23).$$

Iš gautosios lygybės atėmę pirmąją, gauname

$$100x-x=23,(23)-0,(23),\text{ arba } 99x=23.$$

Iš čia $x=\frac{23}{99}$.

2) Sakykime, $x=2,(173)$. Padauginę šią lygybę iš 1000 (periode 3 skaitmenys!), turime

$$1000x=2173,(173).$$

Iš pastarosios lygybės atėmę pirmąją, gauname

$$1000x-x=2173,(173)-2,(173)=2171.$$

Iš čia

$$x=\frac{2171}{999}=2\frac{173}{999}.$$

3) Sakykime, $x=0,2(37)$. Šią lygybę padauginę iš 10 (prieš periodą yra tik vienas skaitmuo!), dešiniojoje jos pusėje gauname grynąją periodinę trupmeną:

$$10x=2,(37).$$

Remdamiesi 2 pavyzdžiu, gauname

$$10x=2\frac{37}{99}=\frac{235}{99}.$$

Iš čia

$$x=\frac{235}{990}=\frac{47}{198}.$$

4) Sakykime, $x=3,(19)$. Tada iš 2 pavyzdžio išplaukia, kad

$$x=3\frac{19}{99}.$$

Vadinasi, $-3,(19)=-x=-3\frac{19}{99}$.

Taigi tarp racionaliųjų skaičių ir begalinių dešimtainių periodinių trupmenų yra abipus vienareikšmė atitiktis. Todėl racionalųjį skaičių galime apibrėžti šitaip: *racionaliuoju vadinamas skaičius, kuris išreiškiamas begaline dešimtaine periodine trupmena.*

Racionaliųjų skaičių aibę žymėsime Q. Šioje aibėje visada galima atlikti keturis aritmetikos veiksmus. Kitaip tariant, kai r ir s — racionalieji skaičiai, jų suma $r+s$, skirtumas $r-s$, sandauga $r\cdot s$ ir dalmuo $\frac{r}{s}$, kai $s\neq 0$, taip pat yra racionalieji skaičiai. Pirmojo laipsnio lygčių bei lygčių sistemų su racionaliaisiais koeficientais sprendiniai irgi yra racionalieji skaičiai. Tačiau jau paprasčiausios kvadratinės lygtys ne visada turi racionaliųjų šaknų.

Pavyzdžiui, lygtis $x^2-2=0$ neturi sveikosios šaknies, nes nėra tokio sveikojo skaičiaus, kurio kvadratas būtų lygus 2. Įrodysime, kad nėra ir tokio racionaliojo skaičiaus, kurio kvadratas lygus 2. Tarkime priešingai, kad $x=\frac{m}{n}$, kai $\frac{m}{n}$ — nesuprastinama trupmena, yra lygties $x^2-2=0$ šaknis. Tada $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ arba $m^2=2n^2$. Skaičius $2n^2$, be abejo, yra lyginis. Todėl m^2 — lyginis skaičius. Iš to išplaukia, kad m irgi lyginis skaičius. Tarkime, kad $m=2k$ (k — sveikasis skaičius). Jeigu lygybėje $m^2=2n^2$ vietoje m rašysime $2k$, tai gausime $(2k)^2=2n^2$, arba $2k^2=n^2$. Skaičius $2k^2$ yra lyginis. Todėl n^2 taip pat lyginis skaičius, taigi ir n — lyginis skaičius. Išeina, kad m ir n — lyginiai skaičiai, nors trupmeną $\frac{m}{n}$ laikėme nesuprastinama. Iš gautosios prieštaros išplaukia, kad lygtis $x^2=2$ neturi racionaliųjų šaknų. Tai reiškia, kad skaičius $\sqrt{2}$ nėra racionalusis.

Skaičiai, kurie reiškiami begalinėmis dešimtainėmis neperiodinėmis trupmenomis, vadinami *iracionaliaisiais skaičiais.* Pavyzdžiui, 0,101100111000... yra teigiama begalinė dešimtainė neperiodinė trupmena, todėl ja reiškiamas teigiamas iracionalusis skaičius, o −2,12123123412345... — neigiama begalinė dešimtainė neperiodinė trupmena, todėl ja reiškiamas neigiamas iracionalusis skaičius.

Racionalieji ir iracionalieji skaičiai vadinami *realiaisiais skaičiais.* Visų realiųjų skaičių aibė žymima raide R.

Jeigu realusis skaičius a išreiškiamas teigiama begaline dešim-

taine trupmena $n_0,n_1n_2n_3\ldots$, kurios n_0 — neneigiamas sveikasis skaičius, o $0 \leqslant n_i \leqslant 9$, tai rašoma $a = n_0,n_1n_2n_3\ldots$ Skaičius n_0 vadinamas realiojo skaičiaus *sveikąja dalimi,* o skaitmenys n_1, n_2, n_3, ... — *pirmojo skyriaus, antrojo skyriaus, trečiojo skyriaus, ... skaitmenimis.* Realusis skaičius $b = -m_0,m_1m_2m_3\ldots$ yra neigiamas. Jo sveikoji dalis yra $-m_0$. Realųjį skaičių 0,000... žymėsime 0 ir vadinsime *nuliu.* Realieji skaičiai a ir $-a$ vadinami *priešingaisiais.* Jeigu a — teigiamas, tai $-a$ — neigiamas; jeigu a — neigiamas, tai $-a$ — teigiamas skaičius; jeigu $a=0$, tai ir $-a=0$. Pavyzdžiui, jeigu $a=0{,}101100111\ldots$ $b=-2{,}12345678910ll\ldots$, tai $-a=-0{,}101100111\ldots$, $-b=2{,}1234567891011\ldots$

Du realieji skaičiai (begalinės dešimtainės trupmenos) a ir b vadinami *lygiais* ir rašoma $a=b$, kai jie yra vienodų ženklų, turi lygias sveikąsias dalis ir lygius atitinkamų skyrių skaitmenis. Kitais atvejais sakoma, kad a ir b nelygūs.

Jeigu teigiamų (neigiamų) realiųjų skaičių $a=n_0,n_1n_2n_3\ldots$ ($a=-n_0,n_1n_2n_3\ldots$) ir $b=m_0,m_1m_2m_3\ldots$ ($b=-m_0,m_1m_2m_3\ldots$) $n_0 < m_0$ arba $n_0=m_0$, $n_k<m_k$ ir $n_i=m_i$ su visais $i<k$, tai sakoma, kad skaičius a mažesnis (didesnis) už skaičių b, ir rašoma $a<b$ ($a>b$). Neigiamas skaičius laikomas mažesniu už nulį ir mažesniu už bet kurį teigiamą realųjį skaičių. Nulis yra mažesnis už bet kurį teigiamą realųjį skaičių. Pavyzdžiui, skaičius $a=15{,}030030003\ldots$, $b=15,(07)=15{,}070707\ldots$, $c=-12{,}3=-12{,}3000\ldots$, $d=-15,(07)=-15{,}070707\ldots$, $0=0{,}000\ldots$, $e=0{,}00(3)=0{,}00333\ldots$, $f=15,(03)=15{,}030303\ldots$, $g=-12{,}3006006\ldots$, $h=-12{,}3000\ldots$ sieja sąryšiai

$$d<g<c=h<0<e<a<f<b.$$

Pateiksime sąryšio $a<b$ savybes:

1) su bet kuriais dviem realiaisiais skaičiais teisingas tik vienas iš sąryšių $a<b$, $a=b$, $a>b$;

2) jeigu $a<b$ ir $b<c$, tai $a<c$. Anksčiau nagrinėtame pavyzdyje $d<g$, o $g<c$, todėl $d<c$;

3) kad ir kokie būtų realieji skaičiai a ir b, $a<b$, galima rasti tokį realųjį skaičių c, kad $a<c<b$. Pavyzdžiui, $a=2{,}14(6)$ ir $b=2{,}147(0)$, t. y. $a<b$. Sakykime, $c=2{,}1467(0)$, tada $a<c<b$.

2.1.2. Veiksmai su realiaisiais skaičiais. Realiuosius skaičius apibrėžėme formaliai. Kad galėtume jais operuoti, turime apibrėžti sudėties, atimties, daugybos ir dalybos operacijas. Veiksmus su baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis gerai mokate iš devynmetės mokyklos matematikos kurso. Veiksmus su realiaisiais skaičiais (begalinėmis dešimtainėmis trupmenomis) apibrėšime remdamiesi veiksmais su tų skaičių dešimtainiais artiniais. Pavyzdžiui, skaičiaus $a=3{,}41278305\ldots$ artiniai yra šitokie:

$$3 \leqslant a < 3+1=4 \text{ (vieneto tikslumu)},$$
$$3{,}4 \leqslant a < 3{,}4+0{,}1=3{,}5 \text{ (0,1 tikslumu)},$$
$$3{,}41 \leqslant a < 3{,}42 \text{ (0,01 tikslumu)},$$
$$3{,}412 \leqslant a < 3{,}413 \text{ (0,001 tikslumu)},$$

....

Bendruoju atveju skaičiaus $a=n_0,n_1n_2n_3\ldots$ artiniai 10^{-k} tikslumu yra

$$a_k=n_0,n_1n_2n_3\ldots n_k \text{ (su trūkumu)},$$

$$a'_k=n_0,n_1n_2n_3\ldots n_k+10^{-k} \text{ (su pertekliumi)},$$

skaičiaus $d=-m_0,m_1m_2m_3\ldots$ artiniai 10^{-k} tikslumu yra

$$d_k=-(m_0,m_1m_2m_3\ldots m_k+10^{-k}) \text{ (su trūkumu)},$$

$$d'_k=-m_0,m_1m_2m_3\ldots m_k \text{ (su pertekliumi)}.$$

Remdamiesi realiųjų skaičių palyginimo savybėmis, turime:

$$a_k\leqslant a<a'_k.$$

Pavyzdžiui, $3{,}41278000\ldots\leqslant 3{,}41278\ldots<3{,}41279000\ldots$, kad ir kokie būtų skaičiaus 3,41278... dešimtainiai skaitmenys, esantys po 8.

Pavyzdys. Rasime skaičiaus $\sqrt{2}$ artinius. Kadangi

$$1^2<2<2^2,$$
$$1{,}4^2<2<1{,}5^2,$$
$$1{,}41^2<2<1{,}42^2,$$
$$1{,}414^2<2<1{,}415^2,$$
$$1{,}4142^2<2<1{,}4143^2,$$
$$1{,}41421^2<2<1{,}41422^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

tai

$$1<\sqrt{2}<2 \text{ (vieneto tikslumu)},$$
$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5 \text{ (0,1 tikslumu)},$$
$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42 \text{ (0,01 tikslumu)},$$
$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415 \text{ (0,001 tikslumu)},$$
$$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143 \text{ (0,0001 tikslumu)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vadinasi, $\sqrt{2}=1{,}41421\ldots$

Sakykime, a ir b — realieji skaičiai, o jų artiniai su trūkumu ir su pertekliumi tenkina nelygybes

$$a_k\leqslant a<a'_k,\quad b_k\leqslant b<b'_k.$$

Jeigu a ir b — racionalieji skaičiai, tai $a+b$ irgi racionalusis skaičius, tenkinantis nelygybes

$$a_k+b_k\leqslant a+b<a'_k+b'_k.$$

Kai bent vienas iš skaičių a arba b iracionalus, tai a ir b *sumą* apibrėšime šitaip: *realiųjų skaičių a ir b suma vadinsime realųjį skaičių c, jeigu su visomis neneigiamomis sveikosiomis k reikšmėmis teisingos nelygybės*

$$a_k+b_k\leqslant c<a'_k+b'_k.$$

Platesniuose matematikos kursuose įrodoma, kad toks skaičius yra vienintelis. Čia tik parodysime, kaip randami tokio skaičiaus artiniai.

Sakykime, $\sqrt{2}=1{,}41421\ldots$ ir $\frac{1}{3}=0{,}(3)=0{,}333\ldots$ Sudėsime šių skaičių artinius su trūkumu:

$$1{,}4+0{,}3=1{,}7,$$
$$1{,}41+0{,}33=1{,}74,$$
$$1{,}414+0{,}333=1{,}747,$$
$$1{,}4142+0{,}3333=1{,}7475,$$
$$1{,}41421+0{,}33333=1{,}74754,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ir su pertekliumi:

$$1{,}5+0{,}4=1{,}9,$$
$$1{,}42+0{,}34=1{,}76,$$
$$1{,}415+0{,}334=1{,}749,$$
$$1{,}4143+0{,}3334=1{,}7477,$$
$$1{,}41422+0{,}33334=1{,}74756,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Todėl

$$1{,}7\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{3}<1{,}9,$$
$$1{,}74\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{3}<1{,}76,$$
$$1{,}747\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{3}<1{,}749,$$
$$1{,}7475\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{3}<1{,}7477,$$
$$1{,}74754\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{3}<1{,}74756,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ir $\sqrt{2}+\frac{1}{3}=1{,}74754\ldots$

Panašiai apibrėžiame ir *teigiamų realiųjų skaičių sandaugą: dviejų teigiamų realiųjų skaičių a ir b sandauga vadinsime realųjį skaičių c, jeigu su visomis neneigiamomis sveikosiomis k reikšmėmis teisingos nelygybės*

$$a_k\cdot b_k\leqslant c<a'_k\cdot b'_k.$$

Įrodoma, kad toks skaičius yra vienintelis. Jis žymimas $a\cdot b$.

Pavyzdžiui, jeigu $a=1{,}73204\ldots$ ir $b=1{,}41421\ldots$, tai

$$1{,}7\cdot1{,}4\leqslant a\cdot b<1{,}8\cdot1{,}5,$$
$$1{,}73\cdot1{,}41\leqslant a\cdot b<1{,}74\cdot1{,}42,$$
$$1{,}732\cdot1{,}414\leqslant a\cdot b<1{,}733\cdot1{,}415,$$
$$1{,}7320\cdot1{,}4142\leqslant a\cdot b<1{,}7321\cdot1{,}4143,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Taigi $a\cdot b=2{,}449\ldots$

Jeigu vienas arba abu skaičiai a ir b yra neigiami, tai sandauga apibrėžiama šitaip:

$$a \cdot b = -(-a) \cdot b = -a \cdot (-b),$$

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b).$$

Be to, laikome $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Atimtis ir *dalyba* apibrėžiamos kaip veiksmai, atvirkštiniai sudėčiai ir daugybai: *dviejų realiųjų skaičių a ir b skirtumu vadiname tokį realųjį skaičių, kurį sudėję su b gauname a;* skirtumą žymėsime $a-b$. *Dviejų realiųjų skaičių a ir b* ($b \neq 0$) *dalmeniu vadiname tokį realųjį skaičių, kurį padauginę iš b gauname a*; dalmenį žymėsime $\frac{a}{b}$.

Pateiksime veiksmų su realiaisiais skaičiais savybes:

1) $a+b=b+a$ (perstatymo dėsnis);
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (jungimo dėsnis);
3) $a+0=a$;
4) $a+(-a)=0$;
5) $a \cdot b=b \cdot a$ (perstatymo dėsnis);
6) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ (jungimo dėsnis);
7) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ (daugybos skirstymo dėsnis);
8) $a \cdot 1=a$;
9) $a \cdot \frac{1}{a}=1$ $(a \neq 0)$;
10) $a \cdot \frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$;
11) jeigu $a<b$ ir c — bet koks realusis skaičius, tai

$$a+c<b+c.$$

Pavyzdžiui, prie nelygybės $-2{,}15<3{,}4$ abiejų pusių pridėję po 2,16, gauname teisingą nelygybę $0{,}01<5{,}56$;

12) jeigu $a<b$ ir $c>0$, tai

$$a \cdot c<b \cdot c.$$

Pavyzdžiui, nelygybę $-2{,}5<-1{,}0(3)$ padauginę iš 2, gauname nelygybę $-5<-2{,}0(6)$;

13) jeigu $a<b$ ir $c<0$, tai

$$a \cdot c>b \cdot c.$$

Pavyzdžiui, nelygybę $-2{,}5<-1{,}0(3)$ padauginę iš -2, gauname nelygybę $5>2{,}0(6)$;

14) jeigu $a<b$ ir $c<d$, tai

$$a+c<b+d.$$

Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{r} -1{,}0(3)<4{,}5 \\ +\quad 2{,}0(1)<4{,}25 \\ \hline 1{,}0(4)<8{,}75. \end{array}$$

Išvada. Jeigu $a<b$ ir $c>d$, tai

$$a-c<b-d.$$

Pavyzdžiui,

$$-\frac{\begin{array}{r}-2<\ \ 4{,}7\\ -5>-10{,}3\end{array}}{3<15};$$

15) jeigu $a<b$, $c<d$ ir $a>0$, $c>0$, tai

$$a\cdot c<b\cdot d.$$

Pavyzdžiui, jeigu $5{,}6<7{,}5$ ir $3<5$, tai $5{,}6\cdot 3<7{,}5\cdot 5$, t. y. $16{,}8<$ $<37{,}5$.

P a s t a b a. Ši savybė nelygybėms su neigiamais nariais negalioja. Pavyzdžiui, $-10<5$, $-2<3$, tačiau $(-10)\cdot(-2)>5\cdot 3$;

16) jeigu $a<b$ ir $a>0$, tai

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}.$$

Pavyzdžiui, iš nelygybės $5<10$ išplaukia nelygybė $\frac{1}{5}>\frac{1}{10}$.

2.1.3. Atkarpų matavimas. Skaičių tiesė. Viena iš geometrijos aksiomų tvirtina, kad kiekvienai atkarpai galima priskirti teigiamą skaičių, vadinamą tos atkarpos ilgiu. Atkarpos ilgis pasižymi šiomis savybėmis:

1) bet kokios atkarpos ilgis išreiškiamas teigiamu skaičiumi;

2) bet kokios atkarpos AB ilgis lygus atkarpos BA ilgiui;

3) jeigu taškas C yra atkarpoje AB, tai atkarpos AB ilgis lygus atkarpų AC ir CB ilgių sumai.

Bet kurios atkarpos AB ilgį randame matuodami. Imkime atkarpą EF ir jos ilgį laikykime matavimo vienetu. Atkarpoje AB atidedame atkarpą EF. Jeigu atkarpoje AB ji telpa sveikąjį skaičių kartų,





1 pav.





2 pav.

pavyzdžiui, 3 kartus (1 pav.), tai sakome, kad atkarpos AB ilgis yra 3 ilgio vienetai arba atkarpos AB ilgis lygus 3.

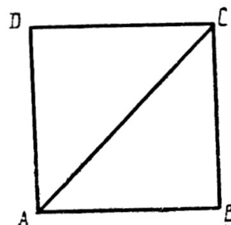
Tarkime, kad atkarpoje AB atkarpa EF tilpo 3 kartus ir liko liekana A_1B (2 pav.), mažesnė už EF. Tada imame atkarpos EF dešimtąją dalį E_1F_1 ir ją atidedame atkarpoje A_1B. Sakykime, kad E_1F_1 šioje atkarpoje tilpo 4 kartus ir dar liko liekana A_2B (3 pav.). Atkarpoje A_2B atidedame šimtąją atkarpos EF dalį. Sakykime, kad ji tilpo 7 kartus ir dar liko liekana A_3B. Taip matavimo procesą tęsia-

me toliau. Galime pasakyti, kad atkarpoje AB tilpo 3 sveiki matavimo vienetai, 4 dešimtosios ir dar 7 šimtosios dalys... Taigi atkarpos AB ilgis išreiškiamas dešimtaine trupmena 3,47... Ši trupmena bus baigtinė, jeigu kuriame nors matavimo etape negausime liekanos. Tačiau ši trupmena gali būti ir begalinė. Jeigu matavimo rezultatas yra begalinė periodinė dešimtainė trupmena, tai ją galime paversti paprastąja. Šiuo atveju, kaip ir pirmuoju, kai matavimo rezultatas — baigtinė dešimtainė trupmena, atkarpos ilgis išreiškiamas racionaliuoju skaičiumi. Tačiau yra atkarpų, kurių ilgiai išreiškiami iracionaliaisiais skaičiais (begalinėmis neperiodinėmis dešimtainėmis trup-





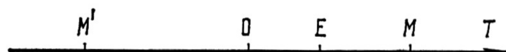
3 pav.



4 pav.

menomis). Pavyzdžiui, kvadrato įstrižainės AC ilgis, kai matavimo vienetas yra kvadrato kraštinė AD (4 pav.), pagal Pitagoro teoremą lygus $\sqrt{2}$, t. y. išreiškiamas iracionaliuoju skaičiumi. Matuodami anksčiau nurodytu būdu atkarpą AC, įsitikintume, kad jos ilgis išreiškiamas begaline neperiodine dešimtaine trupmena 1,41412...

Remdamiesi atkarpų matavimo aksioma, kiekvienam tiesės taškui priskirsime tam tikrą realųjį skaičių. Sakykime, duota tiesė T. Joje pasirenkame du taškus O ir E (5 pav.). Taškas O tiesę dalija į du spindulius. Spindulį, kuriame yra taškas E, laikysime *teigiamu*, o kitą — *neigiamu*. Teigiamąjį spindulį įprasta žymėti rodykle. At-



5 pav.

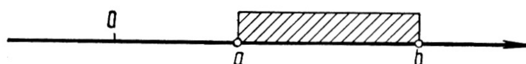
karpos OE ilgį laikysime lygiu 1. Jeigu M — spindulio OE taškas, nesutampantis su O, tai atkarpos OM ilgis yra kuris nors teigiamasis skaičius x. Skaičių x vadiname taško M *koordinate* ir žymime $M(x)$. Taško M', simetriško taškui M centro O atžvilgiu, koordinate vadiname skaičių $-x$. Taigi teigiamojo spindulio taškų koordinatės teigiamos, o neigiamojo — neigiamos. Taško O koordinate laikysime 0. Tokiu būdu *kiekvienam tiesės taškui priskyrėme realųjį skaičių — to taško koordinatę.*

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: *kiekvienas realusis skaičius yra tam tikro (ir tik vieno) tiesės T taško koordinatė.* Skaičių x, vaizduojantį tašką M, randame šitaip: tiesėje T nuo taško O teigiamajame spindulyje atidedame atkarpą OM, kurios ilgis x, kai $x>0$.

Kai $x<0$, neigiamajame spindulyje atidedame atkarpą OM, kurios ilgis yra $-x$. Tokiu būdu tarp tiesės T taškų ir realiųjų skaičių nustatoma abipus vienareikšmė atitiktis. Vietoj posakio „tiesės T taško M koordinatė yra x“ vartojamas ir posakis „skaičius x vaizduojamas tašku M“. Trumpumo dėlei vietoj posakio „taškas, vaizduojantis skaičių x“ sakoma tiesiog „taškas x“.

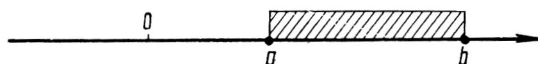
Tiesė T, kurioje tokiu būdu vaizduojami realieji skaičiai, vadinama *skaičių ašimi*. Skaičių ašis paprastai brėžiama horizontali; teigiamuoju spinduliu laikomas dešinysis spindulys, neigiamuoju — kairysis spindulys. Tuomet nesunku geometriškai interpretuoti nelygybę $a<b$: taškas a skaičių ašyje yra į kairę nuo taško b. Jeigu $a<c$ ir $c<b$, tai sakoma, kad taškas c yra tarp taškų a ir b.

Kai $a<b$, visi realieji skaičiai, esantys tarp a ir b, t. y. tenkinantys nelygybes $a<x<b$, sudaro aibę, vadinamą *intervalu*, arba *atviruoju intervalu*. Ši aibė žymima simboliu (a, b). Taškai a ir b vadinami intervalo (a, b) galais. Jie intervalui nepriklauso. 6 paveiksle intervalas (a, b) pavaizduotas geometriškai.



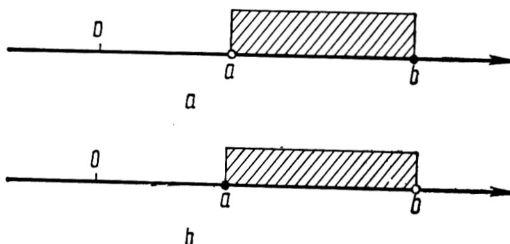
6 pav.

Aibė, sudaryta iš realiųjų skaičių, tenkinančių nelygybes $a\leqslant x\leqslant b$, žymima $[a, b]$ ir vadinama *uždaruoju intervalu*, arba *segmentu*. 7 paveiksle segmentas $[a, b]$ pavaizduotas geometriškai. Taškai a ir b priklauso segmentui $[a, b]$.



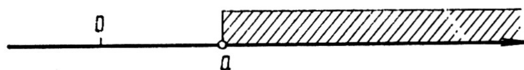
7 pav.

Simboliu $(a, b]$ žymėsime aibę visų realiųjų skaičių, tenkinančių nelygybes $a<x\leqslant b$, o simboliu $[a, b)$ — aibę skaičių, tenkinančių nelygybes $a\leqslant x<b$. Šios dvi aibės vadinamos *pusatviriais intervalais*. Pusatviriai intervalai pavaizduoti 8 paveiksle.



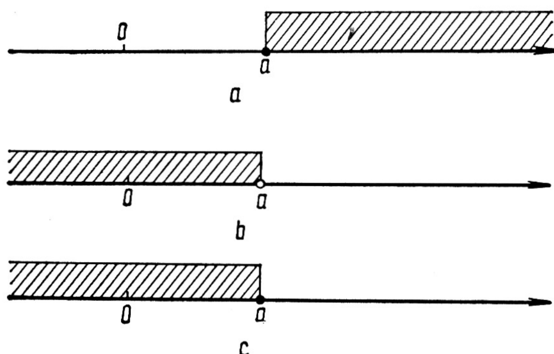
8 pav.

Aibę, sudarytą iš realiųjų skaičių, tenkinančių nelygybę $x>a$, žymėsime $(a, +\infty)$. Geometriškai ši aibė vaizduojama spinduliu, išeinančiu iš taško a (9 pav.).



9 pav.

Simboliais $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ žymimos aibės, atitinkamai apibrėžtos nelygybėmis $x\geqslant a$, $x<a$, $x\leqslant a$. Šios aibės pavaizduotos 10 paveiksle.



10 pav.

Visa realiųjų skaičių aibė R žymima simboliu $(-\infty, +\infty)$.

2.1.4. Absoliutusis didumas. Realiojo skaičiaus x *absoliučiuoju didumu*, arba *moduliu* $|x|$, vadiname didesnįjį iš dviejų skaičių x ir $-x$. Rašome

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Pavyzdžiui, $|4{,}5|=4{,}5$, $|-3|=-(-3)=3$.
Taigi

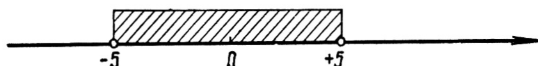
$$|x|=\begin{cases} x, \text{ kai } x>0, \\ 0, \text{ kai } x=0, \\ -x, \text{ kai } x<0. \end{cases}$$

Geometriškai skaičiaus x modulis $|x|$ reiškia skaičių tiesės taško x nuotolį nuo taško O.

1 pavyzdys. Rasime aibę realiųjų skaičių, tenkinančių nelygybę: a) $|x|<5$; b) $|x|\leqslant 2$.

a) Kadangi $|x|$ reiškia taško x atstumą nuo taško O, tai ieškomajai aibei priklausys tokie taškai, kurių atstumas nuo O mažesnis už 5. Skaičių tiesėje pažymėkime taškus, nuo taško O nutolusius atstumu 5; tai taškai -5 ir 5. Tuomet skaičiai x, tenkinantys nelygybes

$-5<x<5$, priklausys ieškomajai aibei (11 pav.). Taigi duotosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-5, 5)$.

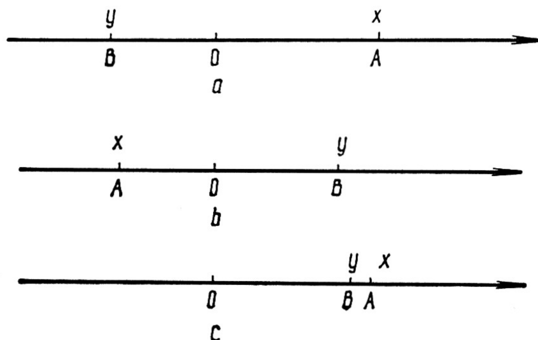


11 pav.

b) Panašiai samprotaudami įsitikiname, kad duotosios nelygybės sprendinių aibė yra segmentas $[-2, 2]$.

Teorema. *Jeigu $A(x)$ ir $B(y)$ — du skaičių tiesės taškai, kurių koordinatės yra x ir y, tai atstumas tarp tų taškų (atkarpos AB ilgis) lygus $|x-y|$.*

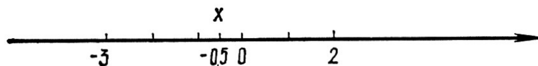
Įrodymas. Jeigu $x>y$, tai atkarpos AB ilgis lygus $x-y$ (12 pav., *a*); jeigu $x<y$, tai atkarpos AB ilgis lygus $y-x$ (12 pav.,



12 pav.

b). Kai $x=y$, atkarpos AB ilgis lygus nuliui (12 pav., *c*). Kita vertus, $|x-y|=x-y$, kai $x>y$, ir $|x-y|=-(x-y)=y-x$, kai $x<y$. Taigi atkarpos AB ilgis lygus $|x-y|$.

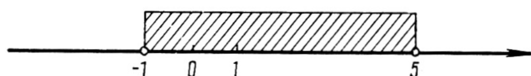
2 pavyzdys. Rasime tokį skaičių x, kad būtų $|x-2|=|x+3|$. Pagal teoremą skaičius $|x-2|$ yra atstumas tarp taškų x ir 2, o skaičius $|x+3|$ — atstumas tarp taškų x ir -3. Vadinasi, taškas x vienodai nutolęs nuo taškų 2 ir -3. Kitaip tariant, x yra atkarpos, kurios galai — taškai -3 ir 2, vidurio taškas. Todėl $x=-0{,}5$ (13 pav.).



13 pav.

3 pavyzdys. Rasime aibę realiųjų skaičių, tenkinančių nelygybę $|x-2|<3$. Tai aibei priklausys skaičių tiesės taškai, nuo taško 2

nutolę atstumu, mažesniu už 3. Tai intervalo $(-1, 5)$ taškai (14 pav.).



14 pav.

Nagrinėsime absoliučiojo didumo savybes:

1) Kad ir koks būtų realusis skaičius x,

$$|x|=|-x|.$$

Kai $x=0$, lygybė akivaizdi. Kai $x>0$, tai $|x|=x$ ir $|-x|=$ $=-(-x)=x$, t. y. $|x|=|-x|$. Panašiai įsitikiname, kad lygybė teisinga ir kai $x<0$.

2) Kad ir koks būtų realusis skaičius x,

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|.$$

Iš apibrėžimo išplaukia, kad $x\leqslant |x|$ ir $-x\leqslant |x|$. Padauginę paskutinę nelygybę iš -1, gauname dvi nelygybes

$$x\leqslant |x|, \quad x\geqslant -|x|, \text{ arba } -|x|\leqslant x\leqslant |x|.$$

3) Nelygybe $|x|<a$, kurioje $a>0$, ir nelygybėmis $-a<x<a$ apibrėžiama ta pati skaičių tiesės taškų aibė (intervalas) $(-a, a)$ (žr. 1 pavyzdį).

4) Su bet kuriais dviem realiaisiais skaičiais x ir y teisinga nelygybė $|x+y|\leqslant |x|+|y|$ (trikampio nelygybė).

Pagal 2 savybę $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$ ir $-|y|\leqslant y\leqslant |y|$. Panariui sudėję šias nelygybes gauname

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|.$$

Iš 3 savybės išplaukia, kad $|x+y|\leqslant |x|+|y|$.

5) Su bet kuriais dviem realiaisiais skaičiais x ir y teisinga lygybė $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

Remiantis realiųjų skaičių sandaugos apibrėžimu,

$$x\cdot y=\begin{cases} |x|\cdot|y|, & \text{kai } x \text{ ir } y \text{ vienodų ženklų arba bent vienas lygus nuliui,} \\ -|x|\cdot|y|, & \text{kai } x \text{ ir } y \text{ priešingų ženklų.} \end{cases}$$

Iš čia išplaukia, kad $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

6) Dviejų skaičių dalmens modulis lygus jų modulių dalmeniui:

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, \text{ kai } y\neq 0.$$

Sakykime, $\frac{x}{y}=z$. Tada $x=z\cdot y$. Pagal 5 savybę $|x|=|z|\cdot|y|$, arba $\frac{|x|}{|y|}=|z|$. Kita vertus, $\left|\frac{x}{y}\right|=|z|$. Taigi $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

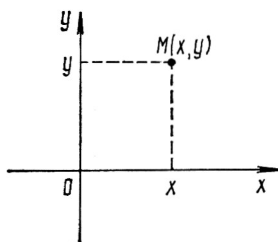
7) Dviejų skaičių skirtumo modulis ne mažesnis už jų modulių skirtumą:

$$|x-y| \geqslant |x|-|y|.$$

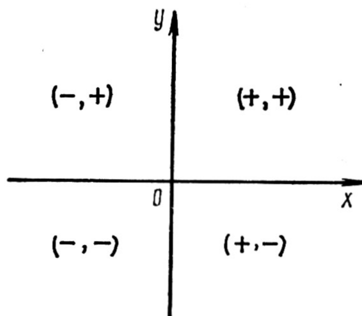
Sakykime, $x-y=z$. Tada $x=z+y$ ir pagal 4 savybę $|x|=|z+y| \leqslant |z|+|y|=|x-y|+|y|$, t. y. $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.

2.1.5. Skaičių plokštuma. 2.1.3 skyrelyje įrodėme, kad tarp realiųjų skaičių aibės ir tiesės taškų yra abipus vienareikšmė atitiktis. Nustatysime abipus vienareikšmę atitiktį tarp realiųjų skaičių sutvarkytų porų ir plokštumos taškų.

Dvi viena kitai statmenos skaičių tiesės x ir y su vienodais ilgio vienetais sudaro *stačiakampę koordinačių sistemą*. Tiesė Ox



15 pav.



16 pav.

vadinama *abscisių ašimi*, tiesė Oy — *ordinačių ašimi*, o tų tiesių susikirtimo taškas O — *koordinačių sistemos pradžios tašku*. Paprastai abscisių ašis yra horizontali, o ordinačių ašis — vertikali, jų teigiamosios kryptys parodytos 15 paveiksle. Per bet kurį plokštumos tašką M nubrėžiame statmenis koordinačių ašims. Tie statmenys kerta koordinačių ašis taškuose P ir N. Taškų P ir N koordinates x ir y vadinsime taško M koordinatėmis: x — *abscise*, y — *ordinate*; žymėsime $M(x, y)$.

Plokštuma, kurioje nusakyta koordinačių sistema, vadinama *koordinačių plokštuma*. Koordinačių ašys koordinačių plokštumą dalija į 4 dalis, vadinamas *ketvirčiais*. Koordinačių ženklai kiekviename ketvirtyje parodyti 16 paveiksle.

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: imant bet kurią sutvarkytą realiųjų skaičių porą (x, y), galima rasti vieną koordinačių plokštumos tašką, kurio koordinatės būtų x ir y. Todėl skaičių pora (x, y) dažnai vadinama tašku, o visų porų aibė — skaičių plokštuma R^2 (skaitoma „er du").

2.2. Artiniai. Absoliučioji ir santykinė paklaidos

2.2.1. Artiniai. Absoliučioji paklaida. Praktinėje veikloje, moksle, technikoje dažnai susiduriame su įvairių dydžių — ilgio, ploto, tūrio, masės, laiko, temperatūros ir kt. reikšmėmis. Tačiau priemonės, ku-

riomis matuojame ar sveriame, nėra absoliučiai tikslios, todėl gautos dydžių reikšmės yra apytikslės. Jos vadinamos dydžių tiksliųjų reikšmių *artiniais*. Pavyzdžiui, apytiksliai galime pasakyti Žemės gyventojų skaičių, apskaičiuoti ežero paviršiaus plotą, daikto masę ir pan. Tačiau tiksliai galime pasakyti mokinių skaičių klasėje, knygų skaičių matematikos kabinete ir kt.

Sakykime, a yra dydžio tiksliosios reikšmės x artinys. Tada rašoma $x \approx a$ (skaitoma „x apytiksliai lygi a"). Jeigu žinoma, kad $a < x$, tai a vadinamas *artiniu su trūkumu*; jeigu $a > x$, tai a vadinamas *artiniu su pertekliumi*. Pavyzdžiui, skaičiaus $x = 7{,}4$ artinys $a = 7$ yra su trūkumu, o artinys $b = 8$ yra su pertekliumi.

Dydžio tiksliosios reikšmės x ir jo artinio a skirtumas vadinamas artinio a *paklaida*. Ankstesniame pavyzdyje $x - a = 0{,}4$, $x - b = -0{,}6$. Atkreipsime dėmesį, kad artinio su trūkumu paklaida teigiama, o artinio su pertekliumi — neigiama.

Dydžio tiksliosios reikšmės x ir jo artinio a skirtumo modulis $|x - a|$ vadinamas *artinio absoliučiąja paklaida* ir žymimas raide Δ, t. y.

$$\boxed{\Delta = |x - a|.} \qquad (1)$$

Praktikoje dydžio tikslioji reikšmė x dažniausiai nežinoma ir negalima rasti tikslios absoliučiosios paklaidos reikšmės. Tačiau svarbu įvertinti nežinomą absoliučiąją paklaidą.

Jeigu artinio a absoliučioji paklaida ne didesnė už skaičių $\Delta a > 0$, tai tas artinys vadinamas *artiniu* Δa *tikslumu*. Skaičius Δa vadinamas *absoliučiosios paklaidos rėžiu*:

$$\Delta = |x - a| \leqslant \Delta a, \qquad (2)$$

arba

$$a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a. \qquad (3)$$

(3) nelygybės užrašomos šitaip:

$$x = a \pm \Delta a. \qquad (4)$$

Pažymėsime, kad skaičių Δa, tenkinančių (2) nelygybę, yra be galo daug. Praktikoje stengiamasi parinkti kiek galima mažesnį iš jų.

1 pavyzdys. Matuodami atkarpos ilgį x liniuote, kurios vienos padalos reikšmė 0,5 cm, gavome $a = 204$ cm. Aišku, matuodami galėjome suklysti ne daugiau kaip 0,5 cm. Taigi $\Delta = |x - 204| < 0{,}5$.

2 pavyzdys. Atkarpos ilgis x cm yra tarp rėžių 45 ir 46: $45 < x < 46$. Rasime ilgio matavimo absoliučiosios paklaidos rėžį.

Atkarpos ilgio artinys gali būti bet koks skaičius, esantis tarp 45 ir 46. Paprastai artiniu imamas rėžių vidurkis, t. y. $a = \frac{45 + 46}{2} = 45{,}5$. Tada atkarpos ilgio artinio absoliučiosios paklaidos rėžis bus ne didesnis už 0,5 cm, t. y. $\Delta a = 0{,}5$ ir $x = 45{,}5 \pm 0{,}5$.

Praktikoje artiniai užrašomi vartojant patikimus skaitmenis.

Skaičiaus artinio kurio nors skyriaus skaitmuo vadinamas *pati-*

kimu plačiąja prasme, jeigu artinio absoliučiosios paklaidos rėžis ne didesnis už šio skyriaus vienetą.

3 pavyzdys. Rasime patikimus plačiąja prasme skaitmenis šių artinių: a) $3{,}94 \pm 0{,}063$; b) $4{,}538 \pm 0{,}0006$; c) 37196 ± 400.

a) Paklaidos rėžis $\Delta a = 0{,}063$ ne didesnis už dešimtųjų skyriaus vienetą $(0{,}063 < 0{,}1)$. Vadinasi, patikimi skaitmenys yra 3 ir 9.

b) Kadangi $\Delta a = 0{,}0006 < 0{,}001$, tai visi artinio skaitmenys yra patikimi.

c) $\Delta a = 400 < 1000$, taigi patikimi skaitmenys yra 3 ir 7.

Skaičiaus artinio kurio nors skyriaus skaitmuo vadinamas *patikimu siaurąja prasme*, jeigu artinio absoliučiosios paklaidos rėžis yra ne didesnis už pusę šio skyriaus vieneto.

4 pavyzdys. Rasime skaičiaus $x = 7{,}458 \pm 0{,}0007$ patikimus plačiąja ir siaurąja prasme skaitmenis. Kadangi $\Delta a = 0{,}0007 < 0{,}001$, tai visi skaitmenys yra patikimi plačiąja prasme. Skaitmuo 8 nepatikimas siaurąja prasme, nes netenkinama nelygybė $\Delta a < \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 = 0{,}0005$.

Artinio skaitmenys, kai nežinome, ar jie patikimi, vadinami *abejotinais*. Užrašydami skaičiaus artinį, susitarsime rašyti tik patikimus (jeigu nenurodyta — plačiąja prasme) skaitmenis ir rašysime $x \approx a$. Taip užrašius skaičių, tuojau galima rasti absoliučiosios paklaidos rėžį. Pavyzdžiui, jeigu $x \approx 0{,}297$, $y \approx 23{,}94$, $z \approx 17{,}000216$, tai atitinkamai $\Delta a = 0{,}001$, $\Delta b = 0{,}01$ ir $\Delta c = 0{,}000001$. Jeigu $x \approx 2700$, $y \approx 2{,}70$, $z \approx 2{,}700$, tai atitinkamai $\Delta a = 100$, $\Delta b = 0{,}01$ ir $\Delta c = 0{,}001$. Taigi nuliai artinio gale turi prasmę ir jų nubraukti negalima.

Pastaba. Termino „patikimas skaitmuo“ nereikia suprasti pažodžiui: artinio patikimas skaitmuo gali ir nesutapti su skaičiaus tiksliosios reikšmės atitinkamo skyriaus skaitmeniu. Pavyzdžiui, skaičiaus 7,8459 artinys su pertekliumi yra $a = 7{,}846$. Kadangi $|7{,}8459 - 7{,}846| = 0{,}0001$, tai visi artinio skaitmenys patikimi, tačiau skaitmuo 6 (tūkstantųjų vienetai) nesutampa su skaičiaus tiksliosios reikšmės tūkstantųjų skaitmeniu 5.

Artinio *reikšminiais skaitmenimis* vadinami visi jo skaitmenys, išskyrus nulius, esančius prieš pirmąjį nelygų nuliui skaitmenį. Pavyzdžiui, skaičiai $x \approx 30{,}5$, $y \approx 0{,}350$, $z \approx 0{,}0300$ turi po tris reikšminius skaitmenis.

Praktikoje dažnai tenka atlikti veiksmus su skaičiais, turinčiais daug reikšminių skaitmenų. Kartais pravartu dalį tų skaitmenų pakeisti nuliais. Tokia operacija vadinama *skaičiaus apvalinimu*. Jeigu apvalinimo rezultatą pažymėsime a_1, tai skaičių $|a - a_1|$ vadinsime artinio *a apvalinimo paklaida*. Skaičius a_1 parenkamas taip, kad apvalinimo paklaida būtų mažiausia. Pavyzdžiui, jeigu $a = 125{,}81$ ir jį reikia suapvalinti iki sveikojo skaičiaus, tai galimi du atvejai: $a_1 = 125$ arba $a_1 = 126$. Pirmuoju atveju $|a - a_1| = 0{,}81$, antruoju — $|a - a_1| = 0{,}14$. Akivaizdu, kad geriau apvalinti šitaip: $a_1 = 126$.

Apvalinant skaičius laikomasi šios taisyklės: ***norint suapvalinti skaičių iki n reikšminių skaitmenų, reikia atmesti visus skaitmenis,***

esančius į dešinę nuo n-ojo reikšminio skaitmens arba (kai skaičius sveikasis) pakeisti juos nuliais. Be to, jeigu pirmasis atmetamas skaitmuo ne mažesnis už 5, tai prie paskutinio paliekamo skaitmens pridedamas vienetas. Pavyzdžiui, skaičių 267,25 suapvalinę iki dešimtųjų, gauname skaičių 267,3. Suapvalinę tą skaičių iki vienetų, gauname 267 ir suapvalinę iki šimtų — skaičių 300.

Laikantis šios taisyklės, apvalinimo paklaida būna ne didesnė už paskutinio paliekamo skaitmens skyriaus vieneto pusę.

Įvertinsime artinio a_1 paklaidą:

$$\Delta_1=|x-a_1|=|x-a+a-a_1|\leqslant|x-a|+|a-a_1|. \quad (5)$$

Taigi *artinio a_1 absoliučiosios paklaidos rėžis ne didesnis už artinio a absoliučiosios paklaidos rėžio ir apvalinimo paklaidos sumą.*

5 pavyzdys. Sakykime, $x\approx2{,}35$. Suapvalinę artinį iki dešimtųjų, gauname $a_1=2{,}4$. Kadangi $\Delta=0{,}01$, tai

$$\Delta_1=|x-2{,}4|\leqslant0{,}01+|2{,}35-2{,}4|=0{,}01+0{,}05=0{,}06.$$

Gautojo artinio visi skaitmenys patikimi ($0{,}06<0{,}1$), ir absoliučiosios paklaidos rėžis ne didesnis už 0,06.

P a s t a b a. (5) formulę galima taikyti ir apvalinant artinius, turinčius abejotinų skaitmenų.

6 pavyzdys. Artinį $x=2{,}0738\pm0{,}0037$ suapvalinsime iki pirmojo patikimo skaitmens. Kadangi $\Delta a=0{,}0037<0{,}01$, tai paskutinis patikimas skaitmuo yra 7. Taigi $2{,}0738\approx2{,}07$. Paklaidos rėžis $\Delta_1=$ $=0{,}0037+0{,}0038=0{,}0075<0{,}01$. Vadinasi, skaičius 2,07 yra skaičiaus 2,0738 artinys 0,01 tikslumu. Visi artinio skaitmenys patikimi.

2.2.2. Santykinė paklaida. Artinio absoliučioji paklaida neapibūdina matavimo arba skaičiavimo kokybės. Pavyzdžiui, matuojant atstumą gauti šie rezultatai: $l_1=100\pm0{,}1$ km ir $l_2=25\pm0{,}1$ m. Nors pirmuoju atveju absoliučioji paklaida $\Delta=100$ m, o antruoju atveju — 0,1 m, tačiau negalime tvirtinti, kad antruoju atveju matavimo kokybė yra geresnė negu pirmuoju. Matavimo kokybę apibūdina *santykinė paklaida.*

Skaičiaus *x artinio a santykine paklaida* δ vadinamas artinio absoliučiosios paklaidos ir artinio modulio santykis:

$$\boxed{\delta=\frac{|x-a|}{|a|}.} \quad (1)$$

Ankstesniame pavyzdyje $\delta_1=\frac{100}{100000}=0{,}001$ ir $\delta_2=\frac{0{,}1}{25}=0{,}04.$

Santykinė paklaida dažnai reiškiama procentais. Išnagrinėtame pavyzdyje pirmuoju atveju santykinė paklaida yra 0,1%, antruoju — 4%.

Kadangi dažnai nežinome artinio absoliučiosios paklaidos, tai santykinę paklaidą įvertiname naudodamiesi artinio absoliučiosios paklaidos rėžiu.

Artinio *a santykinės paklaidos rėžiu* δa vadinamas absoliučiosios paklaidos rėžio Δa ir artinio *a* modulio santykis:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}. \quad (2)$$

Kuo mažesnis santykinės paklaidos rėžis, tuo dydžio matavimo ar skaičiavimo kokybė geresnė.

Santykinės paklaidos rėžis paprastai reiškiamas procentais:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \cdot 100\%. \quad (3)$$

1 pavyzdys. Rasime santykinės paklaidos rėžį išmatavę kambario ilgį: $650 \pm 0,5$ cm. Pagal (3) formulę

$$\delta a = \frac{0,5}{650} \cdot 100 = \frac{1}{13} = 0,077 = 0,08\%.$$

Atkreipsime dėmesį, kad santykinės paklaidos rėžį reikia apvalinti su pertekliumi ($\delta \leqslant \delta a$).

Iš (3) formulės galime rasti artinio a absoliučiosios paklaidos rėžį, kai žinomas artinio santykinės paklaidos rėžis:

$$\Delta a = \frac{\delta a \cdot |a|}{100}. \quad (4)$$

2 pavyzdys. Rasime ampermetro tikslumą, kai matavimo santykinė paklaida ne didesnė už 0,2% ir matuojant gautas 10,65 A srovės stiprumas. Pagal (4) formulę randame absoliučiosios paklaidos rėžį:

$$\Delta a = \frac{0,2 \cdot 10,65}{100} = 0,02.$$

Vadinasi, ampermetro tikslumas 0,02.

Pažymėsime, kad artinio, kurio visi skaitmenys patikimi, santykinės paklaidos rėžis priklauso tik nuo reikšminių skaitmenų ir nepriklauso nuo kablelio vietos.

3 pavyzdys. Sakykime, $x \approx a = 0,025$ (du reikšminiai skaitmenys), $y \approx b = 2,5$ (du reikšminiai skaitmenys) ir $z \approx c = 2,50$ (trys reikšminiai skaitmenys). Tada

$$\delta a = \frac{0,001 \cdot 100}{0,025} = \frac{1}{25} \cdot 100 = 4\%,$$

$$\delta b = \frac{0,1 \cdot 100}{2,5} = \frac{1}{25} \cdot 100 = 4\%,$$

$$\delta c = \frac{0,01 \cdot 100}{2,50} = \frac{1}{250} \cdot 100 = 0,4\%.$$

Iš nagrinėto pavyzdžio išplaukia, kad *santykinės paklaidos rėžis lygus iš* 100 *padaugintai trupmenai, kurios skaitiklis yra vienetas, o vardiklis — sveikasis skaičius, užrašytas duotojo skaičiaus reikšminiais skaitmenimis.* Taigi, kuo artinyje daugiau reikšminių skaitmenų, tuo santykinės paklaidos rėžis mažesnis.

Praktiniuose skaičiavimuose, nereikalaujančiuose didelio tikslumo, užtenka apsiriboti 3 reikšminiais skaitmenimis. Šiuo atveju santykinės paklaidos rėžis bus ne didesnis už 1%. Iš tikrųjų, jeigu artinio a reikšminiai skaitmenys a, b, c, tai

$$\delta u = \frac{1}{abc} \cdot 100 \leqslant \frac{1}{100} \cdot 100 = 1\,\%.$$

2.3. Veiksmai su artiniais

2.3.1. Artinių sudėtis ir atimtis. Sakykime, kad $x=a\pm\Delta a$, $y=b\pm\Delta b$, arba

$$a-\Delta a \leqslant x \leqslant a+\Delta a, \qquad b-\Delta b \leqslant y \leqslant b+\Delta b. \tag{1}$$

Sudėję šias nelygybes panariui, gauname

$$a+b-(\Delta a+\Delta b) \leqslant x+y \leqslant a+b+(\Delta a+\Delta b),$$

arba

$$x+y=a+b\pm(\Delta a+\Delta b). \tag{2}$$

Taigi *dviejų artinių sumos absoliučiosios paklaidos rėžis lygus dėmenų absoliučiųjų paklaidų rėžių sumai:*

$$\boxed{\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b.} \tag{3}$$

Iš (2) formulės išplaukia, kad

$$\boxed{\delta(a+b)=\frac{\Delta a+\Delta b}{|a+b|}.} \tag{4}$$

(3) ir (4) formules galime apibendrinti ir didesniam dėmenų skaičiui:

$$\Delta(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\Delta a_1+\Delta a_2+\ldots+\Delta a_n, \tag{3'}$$

$$\delta(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\frac{\Delta a_1+\Delta a_2+\cdots+\Delta a_n}{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}. \tag{4'}$$

Antrąją iš (1) nelygybių padauginę iš -1 ir sudėję su pirmąja, gauname

$$a-b-(\Delta a+\Delta b) \leqslant x-y \leqslant a-b+(\Delta a+\Delta b).$$

arba

$$x-y=a-b\pm(\Delta a+\Delta b). \tag{5}$$

Taigi *dviejų artinių skirtumo absoliučiosios paklaidos rėžis lygus tų artinių absoliučiųjų paklaidų rėžių sumai:*

$$\boxed{\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b.} \tag{6}$$

Iš (6) formulės išplaukia, kad

$$\boxed{\delta(a-b)=\frac{\Delta a+\Delta b}{|a-b|}.} \tag{7}$$

Iš (3) ir (6) formulių išeina, kad sumos arba skirtumo tikslumas negali būti didesnis už mažiausiai tikslaus artinio tikslumą. Kadangi artinių tikslumas susijęs su reikšminių skaitmenų po kablelio skaičiumi, tai *sudedant arba atimant artinius rezultato artinyje reikia palikti tiek dešimtainių ženklų, kiek jų yra artinyje su mažiausiu dešimtainių ženklų skaičiumi.*

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime dviejų artinių $x \approx a = 3{,}93$ ir $y \approx b = 1{,}1745$ skirtumą ir to skirtumo absoliučiąją ir santykinę paklaidas. Kadangi $\Delta a = 0{,}01$ ir $\Delta b = 0{,}0001$, tai pagal (6) formulę $\Delta(a-b) = 0{,}01 + 0{,}0001 = 0{,}0101$. Vadinasi, $x - y = 2{,}7555 \pm 0{,}0101$ ir $x - y \approx 2{,}76$. Artinio 2,76 patikimi tik du skaitmenys 2 ir 7. Pagal (7) formulę $\delta(a-b) = \frac{0{,}0101}{2{,}76} = 0{,}0037$. Iš čia $\delta = 0{,}4\%$.

2. Rasime artinių $x \approx 2{,}4$, $y \approx 7{,}1645$, $z \approx 1{,}2517$ ir $t \approx 0{,}8813$ sumą. Kadangi pirmasis artinys turi tik vieną patikimą dešimtainį ženklą, tai sumoje paliksime tik vieną dešimtainį ženklą:

$$
\begin{array}{r}
2{,}4 \\
+\ 7{,}1645 \\
1{,}2517 \\
0{,}8813 \\
\hline
11{,}6975 \approx 11{,}7.
\end{array}
$$

Matome, kad trijų dėmenų paskutiniai skaitmenys neturi įtakos rezultatui. Todėl prieš sudedant tikslinga tuos dėmenis suapvalinti. Pirmiausia suapvalinkime iki vieno ženklo po kablelio tikslumu, po to iki dviejų ženklų po kablelio tikslumu ir sudėkime:

$$2{,}4 + 7{,}2 + 1{,}3 + 0{,}9 = 11{,}8,$$

$$2{,}4 + 7{,}16 + 1{,}25 + 0{,}88 = 11{,}69 \approx 11{,}7.$$

Antruoju atveju gavome tokį pat rezultatą, kaip ir sudėję nesuapvalintus artinius.

Taigi sudėsime arba atimsime artinius, kurių visi skaitmenys patikimi, laikydamiesi šios taisyklės:

1) *visus artinius apvaliname palikdami vienu dešimtainiu skaitmeniu daugiau, negu jų turi mažiausio tikslumo artinys* (laikome, kad tikslus skaičius turi kiek norima patikimų dešimtainių ženklų, pavyzdžiui, 2,5=2,5000...),

2) *atlikę veiksmus su suapvalintais artiniais, rezultate paliekame tiek dešimtainių skaitmenų, kiek jų turėjo mažiausio tikslumo artinys,*

3) *rezultato absoliučiąją ir santykinę paklaidas randame naudodamiesi šio skyrelio atitinkamomis formulėmis ir* 2.2.1 *skyrelio* (5) *formule.*

2.3.2. Artinių daugyba ir dalyba. Sakykime, $x = a \pm \Delta a$ ir $y = b \pm \Delta b$. Sudauginę šias lygybes, gauname

$$xy = ab \pm (b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot \Delta b).$$

Laikysime, kad Δa ir Δb tokie maži palyginti su a ir b, kad dėmens $\Delta a \cdot \Delta b$ galima nepaisyti. Tada

$$xy = ab \pm (b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b)$$

ir

$$|xy - ab| = |b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b| \leqslant |b| \cdot \Delta a + |a| \cdot \Delta b.$$

Vadinasi, sandaugos xy absoliučiosios paklaidos rėžiu galime laikyti skaičių

$$\Delta(ab) = |b| \cdot \Delta a + |a| \cdot \Delta b. \qquad (1)$$

Iš santykinės paklaidos apibrėžimo ir (1) formulės išplaukia, kad

$$\delta(ab) = \frac{\Delta(ab)}{|ab|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|},$$

t. y.

$$\boxed{\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b.} \qquad (2)$$

Kai $a = b$, gauname

$$\Delta(a^2) = 2|a| \cdot \Delta a, \quad \delta(a^2) = 2 \cdot \delta a. \qquad (3)$$

Panašiai galima įrodyti, kad

$$\boxed{\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b.}$$

Iš (2) ir (4) formulių išplaukia, kad sandaugos ir dalmens santykinės paklaidos rėžis negali būti mažesnis už netiksliausio artinio santykinės paklaidos rėžį. Kadangi santykinės paklaidos rėžis apibūdinamas reikšminių skaitmenų skaičiumi, tai dauginant ir dalijant artinius taikoma ši taisyklė: *sandaugoje ar dalmenyje paliekama tiek reikšminių skaitmenų, kiek yra mažiausiai jų turinčiame artinyje.*

Kaip ir artinių sudėties ir atimties atvejais, tikslinga iš anksto suapvalinti daugiau reikšminių skaitmenų turinčius artinius. Apvalinant paliekama vienu skaitmeniu daugiau, negu jų turi mažiausio tikslumo artinys.

Pavyzdžiai. 1. Rasime artinių $x \approx a = 7{,}21$ ir $y \approx b = 8{,}27$ sandaugos patikimus skaitmenis.

Pirmiausia randame sandaugos santykinės paklaidos rėžį:

$$\delta(ab) = \frac{0{,}01}{7{,}21} + \frac{0{,}01}{8{,}27} = 0{,}0026.$$

Kadangi $\Delta(ab) = |ab| \cdot \delta(ab)$ ir $ab = 7{,}21 \cdot 8{,}27 = 59{,}6267 \approx 59{,}6$ (suapvalinome iki trijų reikšminių skaitmenų!), tai $\Delta(ab) = 59{,}6 \cdot 0{,}0026 < < 60 \cdot 0{,}003 = 0{,}18 < 1$.

Vadinasi, sandaugos $xy \approx 59{,}6$ skaitmuo 6 yra abejotinas.

2. Rasime artinių $x = 503$ ir $y \approx 8{,}2$ sandaugą. Pirmasis dauginamasis yra tikslus, o antrasis turi du reikšminius skaitmenis. Sandaugoje paliekame du reikšminius skaitmenis:

$$xy \approx 503 \cdot 8{,}2 = 4124{,}6 \approx 4100.$$

Šiame užraše abu nuliai yra abejotini, todėl sandaugą rašysime taip:

$$xy \approx 41 \cdot 10^2.$$

Iš tokio skaičiaus užrašo matyti kiek yra patikimų skaitmenų. Pavyzdžiui, skaičiaus $320 \cdot 10^3$ pirmasis nulis yra patikimas, o paskutiniai trys — abejotini.

2.3.3. Artinių kėlimas laipsniu ir šaknies traukimas iš artinių. 1) Sakykime, $x \approx a$ ir $x^n \approx a^n$ (n — natūrinis skaičius). Rasime laipsnio x^n artinio a^n santykinės paklaidos rėžį, kai pagrindo santykinės paklaidos rėžis yra δa. Kadangi $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a$, tai remiantis 2.3.2 skyrelio (2) formule nesunku įrodyti, kad

$$\delta(a^n) = \delta a + \delta a + \ldots + \delta a,$$

t. y.

$$\boxed{\delta(a^n) = n \cdot \delta a.} \qquad (1)$$

Taigi *laipsnio santykinės paklaidos rėžis lygus pagrindo santykinės paklaidos rėžio ir laipsnio rodiklio sandaugai.*

Laipsnio artinyje reikia palikti tiek reikšminių skaitmenų, kiek jų yra pagrinde.

2) Sakykime, kad $x \approx a$ ir $\sqrt[n]{x} \approx \sqrt[n]{a}$. Jeigu δa yra pošaknio santykinės paklaidos rėžis ir $b = \sqrt[n]{a}$ $(a = b^n)$, tai remiantis (1) formule

$$\delta a = n \cdot \delta b = n \cdot \delta(\sqrt[n]{a})$$

ir

$$\boxed{\delta\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \cdot \delta a.} \qquad (2)$$

Vadinasi, *n-ojo laipsnio šaknies santykinės paklaidos rėžis n kartų mažesnis už pošaknio skaičiaus santykinės paklaidos rėžį.*

Kaip ir keliant laipsniu, *ištraukus šaknį reikia palikti tiek reikšminių skaitmenų, kiek jų yra pošaknio artinyje.*

Pavyzdžiai. 1. Rasime artinio $x \approx a = 3{,}18$ kvadrato patikimus skaitmenis. Kadangi $a^2 = 3{,}18 \cdot 3{,}18 = 10{,}1124 \approx 10{,}1$ ir

$$\delta(a^2) = 2 \cdot \delta a = \frac{2 \cdot 0{,}01}{3{,}18} = 0{,}007,\ \Delta(a^2) = a^2 \cdot \delta(a^2) = 10{,}1124 \cdot 0{,}007 = 0{,}07,$$

tai atsižvelgę į apvalinimo paklaidą gauname

$$x^2 = 10{,}1 \pm (0{,}07 + 0{,}0124) = 10{,}1 \pm 0{,}0824.$$

Taigi artinio $x^2 \approx 10{,}1$ visi skaitmenys yra patikimi.

2. Rasime, su kokia santykine paklaida ištraukiama kubinė šaknis iš artinio $x \approx a = 27{,}6$.

Kadangi $\delta(27{,}6) = 0{,}0037$, tai remdamiesi (2) formule gauname

$$\delta(\sqrt[3]{2{,}76}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}0037 = 0{,}0013, \text{ arba } \delta(\sqrt[3]{2{,}76}) = 0{,}13\%.$$

3. Apskaičiuosime stačiojo trikampio įžambinės ilgį, kai jo statiniai yra $x \approx a = 3{,}18$, $y \approx b = 2{,}512$, ir rasime rezultato patikimus skaitmenis.

Pagal Pitagoro teoremą trikampio įžambinė c lygi $\sqrt{a^2+b^2}$. Taigi $c=\sqrt{3{,}18^2+2{,}512^2}=\sqrt{16{,}423}=4{,}052\approx4{,}05$.

Norint rasti skaičiavimų rezultato patikimus skaitmenis, reikia žinoti Δc. Remiantis anksčiau gautomis formulėmis,

$$\Delta c=\Delta(\sqrt{a^2+b^2})=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\delta(\sqrt{a^2+b^2})=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{2}\,\delta(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{\Delta(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{(2a\cdot\Delta a+2b\cdot\Delta b)}{a^2+b^2}=\frac{a\cdot\Delta a+b\cdot\Delta b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Kadangi $\Delta a=0{,}01$, $\Delta b=0{,}001$, tai

$$\Delta c=\frac{3{,}18\cdot0{,}01+2{,}512\cdot0{,}001}{4{,}05}=0{,}0085<0{,}01.$$

Atsižvelgę į apvalinimo paklaidą, gauname

$$z=4{,}05\pm0{,}012.$$

Taigi įžambinės ilgio vienetų ir dešimtųjų dalių skaitmenys yra patikimi.

2.3.4. Skaičiavimas iš anksto nurodytu tikslumu. Ankstesniuose skyreliuose nagrinėjome tiesioginį apytikslio skaičiavimo uždavinį: reikėjo įvertinti paklaidą, gautą atlikus nurodytus veiksmus su duotaisiais apytiksliais skaičiais, kurių paklaidos taip pat duotos. Dabar spręsime atvirkštinį uždavinį: rasime, kokios turi būti duotųjų apytikslių dydžių paklaidos, kad atlikę su jais nurodytus veiksmus gautume leistiną paklaidos rėžį. Apskritai toks uždavinys matematiškai neapibrėžtas, todėl jam spręsti reikia papildomų sąlygų. Pavyzdžiui, duotųjų artinių paklaidų rėžiai turi būti tarpusavyje lygūs.

Pavyzdžiai. 1. Nustatysime, kokiu tikslumu reikia išmatuoti kvadrato kraštinę, kad apskaičiavus jo plotą absoliučiosios paklaidos rėžis būtų ne didesnis kaip 5 cm². Netikslus kraštinės ilgio artinys yra 130 cm.

Kadangi $S=a^2$, tai $\Delta S=\Delta(a^2)=2a\cdot\Delta a$. Iš čia

$$\Delta a=\frac{\Delta S}{2a}=\frac{5}{2\cdot130}=0{,}02\text{ cm}.$$

Vadinasi, jei ilgio a matavimo paklaida bus ne didesnė už 0,02 cm, tai ploto paklaida bus ne didesnė už 5 cm².

2. Kokiu tikslumu reikia išmatuoti stačiojo ritinio aukštinę H ir spindulį R, kad ritinio tūrio, apskaičiuoto pagal formulę $V=\pi R^2H$, paklaida būtų ne didesnė už 100 cm³? Netikslūs spindulio ir aukštinės artiniai šitokie: $R=30$ cm, $H=80$ cm.

Remdamiesi sandaugos ir laipsnio santykinės paklaidos rėžio skaičiavimo formulėmis, gauname

$$\delta V=\delta\pi+2\cdot\delta R+\delta H,$$

arba

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta\pi}{\pi}+2\frac{\Delta R}{R}+\frac{\Delta H}{H}.$$

Iš čia

$$\Delta V=\frac{V}{\pi}\Delta\pi+\frac{2V}{R}\cdot\Delta R+\frac{V}{H}\Delta H.$$

Sąlygoje duota, kad $\Delta V=100$, o π galime rasti iš lentelių arba skaičiuotuvu bet kokiu tikslumu. Pavyzdžiui, jei $\pi=3{,}142$, tai $\Delta\pi=0{,}00041$. Grubiai apskaičiavę $\frac{V}{\pi}$, $\frac{2V}{R}$, $\frac{V}{H}$ reikšmes ir jas įrašę į paskutinę lygybę, gauname

$$100=72000\cdot0{,}00041+15100\cdot\Delta R+2900\cdot\Delta H,$$

arba

$$151\cdot\Delta R+29\cdot\Delta H=0{,}705.$$

Sakykime, kad R ir H išmatavome vienodu tikslumu, t. y. $\Delta R=$ $=\Delta H$. Tada

$$180\cdot\Delta R=0{,}705.$$

Iš čia

$$\Delta R=\Delta H=0{,}004.$$

Taigi, jeigu ritinio spindulys ir aukštinė išmatuoti ne didesniu kaip 0,004 cm tikslumu, tai tūris V bus apskaičiuotas su paklaida, ne didesne kaip 100 cm^3.

Praktikoje, kai nereikalaujama griežtai įvertinti skaičiavimo paklaidos, dažnai laikomės šios taisyklės: *kad atlikę veiksmus (kurių skaičius nedidelis) gautume skaičių su n patikimų skaitmenų (dešimtainių ženklų arba reikšminių skaitmenų), pradinius duomenis turime imti su $n+1$ patikimu skaitmeniu. Galutinį rezultatą reikia suapvalinti iki n skaitmenų.*

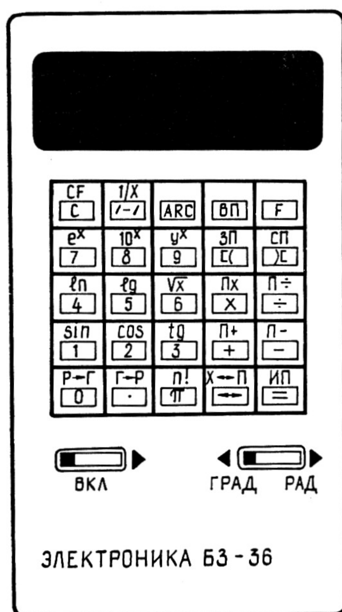
Pavyzdžiui, skaičiuojant reiškinio $\frac{2{,}7x^3+4{,}23}{x^2+1}$ reikšmę su trimis reikšminiais skaitmenimis (reiškinyje esantys skaičiai yra tikslūs), x reikšmę reikia imti su keturiais reikšminiais skaitmenimis.

Jeigu reikia atlikti daug tarpinių veiksmų, tai pradinius duomenis reikia imti su $n+2$ patikimais skaitmenimis.

2.4. Skaičiavimas skaičiuotuvu

Dar netolimoje praeityje pagrindinė inžinieriaus, techniko, geologo, studento skaičiavimo priemonė buvo logaritminė liniuotė. Beveik 350 metų ja buvo naudojamasi ten, kur reikėjo didelio tikslumo skaičiavimų. Tačiau vystantis mokslui ir technikai, prireikė labai didelio tikslumo skaičiavimų. Tokius skaičiavimus ir atlieka galingos elektroninės skaičiavimo mašinos. Individualiam naudojimuisi buvo sukurtos mažos elektroninės skaičiavimo mašinos — skaičiuotuvai. Pramonė gamina keletą skaičiuotuvų tipų — nuo pačių paprasčiausių (Б3-09, Б3-14, Б3-23, Б3-30) iki gana sudėtingų su papildoma klaviatūra, atmintimi (Б3-24, Б3-36 ir kt.).

Trumpai susipažinsime, kaip skaičiuojama skaičiuotuvu Б3-36. Priekinėje dalyje (17 pav.) yra klaviatūra, kuria renkami skaičiai ir atliekamos operacijos, ir ekranas, arba indikatorius. Operacija, pažymėta virš klavišo, vykdoma pirmiausia nuspaudus klavišą [F].



17 pav.

1. Skaičiuotuvu lengva rasti skaitinio reiškinio reikšmę, kai veiksmų atlikimo tvarka sutampa su jų užrašymo tvarka.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime reiškinio

$$3{,}75\cdot 4{,}15+2{,}45-1{,}27$$

reikšmę.

Norint apskaičiuoti šio reiškinio reikšmę, reikia surinkti skaičių 3,75 ir, nuspaudus klavišą [×], surinkti skaičių 4,15, nuspausti klavišą [+], surinkti skaičių 2,45 ir, nuspaudus klavišą [−] ir surinkus skaičių 1,27, nuspausti klavišą [=]. Ekrane pasirodys skaičius 16,7425. Tai ir yra ieškomoji reiškinio reikšmė. Skaičiavimus patogu užrašyti šitokia schema (programa):

3,75 [×] 4,15 [+] 2,45 [−] 1,27 [=].

2. Jeigu veiksmų atlikimo tvarka nesutampa su jų užrašymo tvarka, tai skaičiuojant tenka naudotis klavišais [[( ], [ )]] arba tarpinius rezultatus įrašyti į atmintį.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime reiškinio

$$\frac{(15\times3)+(30:2)}{(3\times8)-(2\times4)}$$

reikšmę.

Skaičiuojame pagal programą:

15 [×] 3 [+] [[( ] 30 [:] 2 [ )]] [:] [[( ] [[( ] 3 [×] 8 [ )]] [−] [[( ] 2 [×] 4 [ )]] [ )]] [=].

Atlikę nurodytus veiksmus, gauname skaičių 3,75.

3 pavyzdys. Apskaičiuosime reiškinio

$$\frac{5}{16}+\frac{13}{60}-\frac{2}{3}$$

reikšmę.

Skaičiuosime dviem būdais.

1) Naudosimės programa:

5 [:] 16 [+] [[( ] 13 [:] 60 [ )]] [−] [[( ] 2 [:] 3 [ )]] [=].

Ekrane pasirodo skaičiai [−1,375 −1]. Skaičius dešinėje ekrano pusėje rodo, kad ekrane esantį rezultatą reikia padauginti iš 10^{-1} (kablelį perkelti į kairę per vieną skaitmenį!). Taigi reiškinio reikšmė lygi −0,1375.

2) Duotojo reiškinio reikšmę galime apskaičiuoti ir taip: pirmiausia randame $\frac{5}{16}$ reikšmę, ją įrašome į atmintį (nuspaudžiame klavišus [F] ir [ЗП]); randame $\frac{13}{60}$ reikšmę ir, nusiuntę ją į atmintį, sudedame (nuspaudžiame klavišus [F] ir [П+]); randame $\frac{2}{3}$ reikšmę, ją nusiunčiame į atmintį ir atimame (nuspaudžiame [F] ir [П−]). Atmintyje gautą rezultatą iškviečiame į ekraną ([F] ir [ИП]). Skaičiavimo programa tokia:

5 [:] 16 [=] [F] [ЗП] 13 [:] 60 [=] [F] [П+] 2 [:] 3 [=] [F] [П−] [F] [ИП].

Ekrane gauname skaičius [−1,375 ⊐ 1]. Ženklelis „⊓" reiškia, kad skaičius 0,1375 įrašytas į atmintį.

Palyginę abi programas, matome, kad pirmoji daug paprastesnė. Skaičiuojant reikia naudotis kuo paprastesnėmis programomis.

3. Kartais skaičiuojant patogu naudotis klavišais [$^1/_x$], [⟷].

4 pavyzdys. Apskaičiuokite šių reiškinių reikšmes:

a) $\frac{12}{4\cdot5+7}$; b) $\frac{5}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}}$.

a) Skaičiuojame pagal programą

4 [×] 5 [+] 7 [:] 12 [⟷] [=].

Gauname 0,(4).

b) Skaičiuojame pagal programą

4 [F] [$^1/_x$] [+] 5 [F] [$^1/_x$] [+] 30 [F] [$^1/_x$] [=] [F] [$^1/_x$] [×] 5 [=].

Gauname 10,344827.

4. Jeigu aritmetinis veiksmas kartojamas ir viena komponentė nesikeičia, tai tos komponentės daugiau nereikia rinkti.

5 pavyzdys. Reiškinį $3+8+\underbrace{7+7+7+7}_{4}$ apskaičiuojame šitaip:

3 [+] 8 [+] 7 [+] $\overbrace{[=]\ [=]\ [=]}^{3}$.

Gauname 39.

Reiškinį $4\cdot5\cdot\underbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}_{5}$ skaičiuojame pagal programą

4 [×] 5 [×] 3 [×] $\overbrace{[=]\ [=]\ [=]\ [=]}^{4}$.

Gauname 4860.

5. Skaičiuotuvu Б3-36 nesunkiai apskaičiuojamas skaičiaus bet koks laipsnis ir iš skaičiaus ištraukiama bet kokio laipsnio šaknis.

6 pavyzdys. Apskaičiuosime: a) $\sqrt{127}$; b) $3^{2,5}$; c) $\sqrt[4]{698}$.

a) 127 [F] [$\sqrt{x}$]. Gauname $\approx 11,27$;

b) 3 [F] [y^x] 2,5 [=]. Gauname ≈15,59;

c) 698 [F] [y^x] 4 [F] [$1/x$] [=]. Gauname ≈5,14.

6. Apskaičiuojant trigonometrinių funkcijų reikšmes, reikia parinkti atitinkamą perjungiklio ГРАД—РАД padėtį priklausomai nuo to, kokiais vienetais išreikštas argumentas.

7 pavyzdys. Apskaičiuosime sin 73° ir tg 2,7 reikšmes.

Perjungiklio ГРАД—РАД padėtis turi būti ГРАД. Skaičiuosime pagal programą

73 [F] [sin].

Ekrane pasirodys skaičiai [9,56305 −1]. Taigi sin 73°= =0,956305.

Perjungiklis ties РАД. tg 2,7 reikšmę skaičiuojame taip:

2,7 [F] [tg].

Gauname tg 2,7=−0,472728.

Jeigu kampas išreikštas laipsniais, minutėmis ir sekundėmis, tai pirmiausia sekundes ir minutes paverčiame laipsnio dalimis (minutė yra $\frac{1}{60}$ laipsnio dalis, o sekundė — $\frac{1}{3600}$ laipsnio dalis), po to skaičiuojame trigonometrinių funkcijų reikšmes.

8 pavyzdys. cos 52° 35′ 40″ reikšmę randame šitaip:

35 [×] 60 [+] 40 [:] 3600 [+] 52 [=] [F] [cos].

Gauname cos 52° 35′ 40″=0,607453.

7. Naudojantis klavišu [ARC] galima rasti kampą, kai žinoma trigonometrinės funkcijos reikšmė.

9 pavyzdys. Duota: cos α=−0,315. Kampą α rasime pagal programą (perjungiklio padėtis — ГРАД)

0,315 [/−/] [ARC] [cos].

Ekrane gauname 108,361. Taigi α=108,361°.

Jeigu laipsnio dalis reikia paversti minutėmis ir sekundėmis, tai naudojamės programa

108,361 [−] 108 [×] 60 [=].

Ekrane gauname 21,66′. Toliau skaičiuojame šitaip:

21,66 [−] 21 [×] 60 [=].

Ekrane matome 39,6″≈40″.
Taigi α=108° 21′ 40″.

8. Jeigu skaičiai labai dideli arba labai maži, tai jie skaičiuotuve užrašomi standartine forma naudojantis klavišu [ВП].

Pavyzdžiui, elektrono krūvis $1{,}6022\cdot 10^{-19}$ skaičiuotuve užrašomas taip:

1,6022 [ВП] 19 [/−/],

o skaičius $-3{,}25\cdot 10^{13}$ — šitaip:

3,25 [/−/] [ВП] 13.

Su kitomis operacijomis, kurias galima atlikti skaičiuotuvu БЗ-36, susipažinsime vėliau, nagrinėdami atitinkamas temas (laipsninė funkcija, logaritminė funkcija ir kt.).

Kad geriau įgustume skaičiuoti skaičiuotuvu, pateiksime keletą sudėtingesnių reiškinių skaičiavimo programų.

10 pavyzdys. Apskaičiuosime reikšmes šių reiškinių:

a) $\sqrt{2{,}5^2+3{,}4^3}$; b) $53{,}2\cdot\sin 46°\,35'-2{,}5\cdot\operatorname{tg} 83°\,45'$;

c) $\sqrt[5]{34{,}5-\sqrt[4]{15{,}01}}$; d) $\dfrac{4{,}5\cdot 2{,}5^{3,5}}{\sqrt[3]{26{,}5}}$;

e) $(3{,}25\cdot 10^{-7}+4{,}5\cdot 10^{-2})\cdot 4{,}6\cdot 10^4$.

Skaičiuosime pagal programas:

a) 2,5 [×] [=] [F] [ЗП] 3,4 [×] [=] [=] [+] [F] [ИП] [F] [$\sqrt{x}$] ; 6,7493703

arba

2,5 [×] [+] [[(] 3,4 [×] [=] [=] [)]] [=] [F] [$\sqrt{x}$] ; 6,7493703;

b) 35 [:] 60 [+] 46 [=] [F] [sin] [×] 53,2 [−] [[(] 45 [:] 60 [+] 83 [=] [F] [tg] [×] 2,5 [)]] [=] ; 15,81585;

c) 15,01 [F] [y^x] 4 [F] [$^1/_x$] [=] [/−/] [+] 34,5 [=] [F] [y^x] 5 [F] [$^1/_x$] [=] ; 2,0066;

d) 2,5 [F] [y^x] 3,5 [×] 4,5 [:] [[(] 26,5 [F] [y^x]

3 [F] [1/x] [)]] [=] ; 37,289517;

e) 3,25 [ВП] 7 [/—/] [+] 4,5 [ВП] 2 [/—/] [×] 4,6

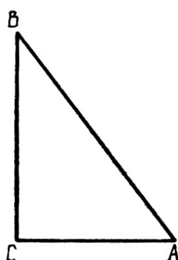
[ВП] 4 [=] ; 2070,0149.

2.5. Trikampių sprendimas

Trikampio *ABC* kraštinių ilgius žymėsime *a, b, c,* o prieš jas esančių kampų didumus atitinkamai *A, B* ir *C*. Dydžius *a, b, c, A, B, C* vadinsime trikampio elementais.

Trikampių sprendimas — tai trikampio nežinomų kraštinių ir kampų radimas, kai žinomi kai kurie kampai ir kraštinės. Galima rasti nežinomus trikampio elementus, kai žinomi 3 jo elementai, iš kurių bent vienas yra kraštinės ilgis. Kartais sprendžiant trikampius be minėtų elementų ieškoma ir trikampio ploto.

2.5.1. Stačiųjų trikampių sprendimas. Raide *C* žymėsime trikampio *ABC* statųjį kampą (18 pav.). Taigi stačiajame trikampyje vienas elementas — statusis kampas yra žinomas. Stačiuosius trikampius



18 pav.

spręsime naudodamiesi iš devynmetės mokyklos matematikos kurso gerai žinomomis formulėmis:

$$c^2=a^2+b^2 \text{ (Pitagoro teorema) (1)},$$

$$\sin A=\frac{a}{c} \text{ (2)}, \quad \cos A=\frac{b}{c} \text{ (3)}, \quad \operatorname{tg} A=\frac{a}{b} \text{ (4)}, \quad A+B=90° \text{ (5)}.$$

Skaičiavimus galima atlikti naudojantis keturženklėmis lentelėmis, logaritmine liniuote arba skaičiuotuvu. Mes naudosimės skaičiuotuvu БЗ-36.

I. *Stačiojo trikampio sprendimas, kai žinoma įžambinė c ir smailusis kampas A.*

Statinį a rasime iš (2) formulės: $a=c\cdot\sin A$ pagal programą

$$A \ \boxed{\text{F}} \ \boxed{\sin} \ \boxed{\times} \ c \ \boxed{=} \ .$$

Iš (3) formulės išplaukia, kad $b=c\cdot\cos A$.

Kampą B galime rasti iš (5) lygybės arba iš formulės $\cos B= =\frac{a}{c}$ pagal programą

$$a \ \boxed{:} \ c \ \boxed{=} \ \boxed{\text{ARC}} \ \boxed{\cos} \ .$$

1 pavyzdys. Duota: $A=43°\,20'$, $c=23{,}5$. Rasime a, b ir B.

1) Apskaičiuojame statinį a:

$$20 \ \boxed{:} \ 60 \ \boxed{+} \ 43 \ \boxed{=} \ \boxed{\text{F}} \ \boxed{\sin} \ \boxed{\times} \ 23{,}5 \ \boxed{=} \ .$$

Gauname $a=16{,}13\approx 16{,}1$.

2) Apskaičiuojame statinį b:

$$20 \ \boxed{:} \ 60 \ \boxed{+} \ 43 \ \boxed{=} \ \boxed{\text{F}} \ \boxed{\cos} \ \boxed{\times} \ 23{,}5 \ \boxed{=} \ ;$$

$b=17{,}09\approx 17{,}1$.

3) Apskaičiuojame kampą B: $B=90°-A=90°-43°\,20'=46°\,40'$.

4) Kontrolei apskaičiuojame kampą A pagal (4) formulę:

$$16{,}13 \ \boxed{:} \ 17{,}09 \ \boxed{=} \ \boxed{\text{ARC}} \ \boxed{\text{tg}} \ .$$

Gauname $A=43{,}34°=43°\,20'24''$.

II. *Stačiojo trikampio sprendimas, kai žinomas statinis a ir smailusis kampas B.*

Kampą A rasime iš (5) lygybės. Statinį b rasime pagal formulę $b=a\cdot\text{tg}\,B$. Naudosimės programa

$$B \ \boxed{\text{F}} \ \boxed{\text{tg}} \ \boxed{\times} \ a \ \boxed{=} \ .$$

Įžambinę c apskaičiuosime pagal formulę $c=\frac{b}{\sin B}$:

$$b \ \boxed{:} \ B \ \boxed{\text{F}} \ \boxed{\sin} \ \boxed{=} \ .$$

2 pavyzdys. Duota: $a=16{,}4$, $B=37°\,45'$. Apskaičiuosime A, b ir c.

1) Apskaičiuojame A:

$$A=90°-B=90°-37°\,45'=52°\,15'.$$

2) Apskaičiuojame b:

$$45 \ \boxed{:} \ 60 \ \boxed{+} \ 37 \ \boxed{=} \ \boxed{\text{F}} \ \boxed{\text{tg}} \ \boxed{\times} \ 16{,}4 \ \boxed{=} \ ;$$

$b=12{,}69\approx 12{,}7$.

3) Apskaičiuojame įžambinę c:

$$12{,}69\ \boxed{:}\ \boxed{[(}\ 45\ \boxed{:}\ 60\ \boxed{+}\ 37\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\text{uıs}}$$

$$\boxed{)]}\ \boxed{=};\ c=20{,}73\approx 20{,}7.$$

4) Kontrolei apskaičiuojame kampą B pagal formulę $\sin B=\frac{b}{c}$:

$$12{,}69\ \boxed{:}\ 20{,}73\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{ARC}}\ \boxed{\sin};\ B=37{,}75°=37°45'.$$

III. *Stačiojo trikampio sprendimas, kai žinoma įžambinė c ir statinis a.*

Kampą A apskaičiuosime pagal formulę $\sin A=\frac{a}{c}$, kampą B — pagal formulę $\cos B=\frac{a}{c}$, o statinį b — pagal formulę $b=c\sin B$.

3 pavyzdys. Duota: $c=47{,}32$, $a=26{,}1$. Rasime A, B ir b.

1) Apskaičiuojame kampą A:

$$26{,}1\ \boxed{:}\ 47{,}32\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{ARC}}\ \boxed{\sin};\ A=33{,}47°=33°\,28'.$$

2) Apskaičiuojame kampą B:

$$26{,}1\ \boxed{:}\ 47{,}32\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{ARC}}\ \boxed{\cos};\ B=56{,}53°=56°\,32'.$$

3) Statinį b skaičiuojame pagal programą

$$32\ \boxed{:}\ 60\ \boxed{+}\ 56\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\sin}\ \boxed{\times}\ 47{,}32\ \boxed{=};\ b=39{,}47.$$

4) Kadangi $A+B=33°\,28'+56°\,32'=90°$, tai skaičiavimai atlikti teisingai.

IV. *Stačiojo trikampio sprendimas, kai žinomi du statiniai a ir b.*

Kampą A apskaičiuosime pagal formulę $\mathrm{tg}\,A=\frac{a}{b}$, kampą B — remdamiesi (5) lygybe, o įžambinę c — formule $c=\frac{a}{\sin A}$.

4 pavyzdys. Duota: $a=14{,}27$, $b=18{,}76$. Rasime A, B ir c.

1) Apskaičiuojame kampą A:

$$14{,}27\ \boxed{:}\ 18{,}76\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{ARC}}\ \boxed{\mathrm{tg}};\ A=37{,}26°=37°\,15'\,30''.$$

2) $B=90°-A=90°-37°\,15'\,30''=52°\,44'\,30''$.

3) Apskaičiuojame c:

$$14{,}27\ \boxed{:}\ 37{,}26\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\sin}\ \boxed{=};\ c=23{,}57.$$

4) Kontrolei apskaičiuojame kampą A pagal formulę $\sin A=\frac{a}{c}$:

$$14{,}27\ \boxed{:}\ 23{,}57\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{ARC}}\ \boxed{\sin};\ A=37{,}26°=37°\,15'\,30''.$$

2.5.2. Bet kokių trikampių sprendimas. Spręsdami bet kokius trikampius, remsimės formule

$$A+B+C=180°$$

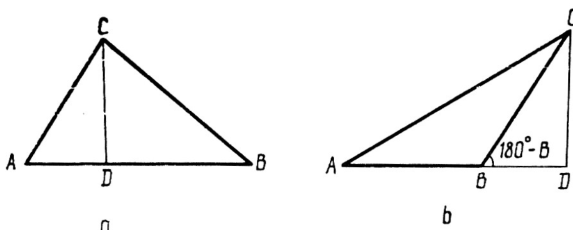
ir dviem teoremomis, kurias dabar ir įrodysime.

1 (sinusų) teorema. *Trikampio kraštinės proporcingos prieš jas esančių kampų sinusams.*

Įrodymas. Sakykime, ABC — trikampis, kurio kraštinės yra a, b, c, o prieš jas esantys kampai — A, B, C (19 pav.). Įrodysime, kad

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \tag{1}$$

Per viršūnę C nubrėžiame aukštinę CD. Iš stačiojo trikampio BCD, jei kampas B smailusis, gauname $CD=a\cdot\sin B$ (19 pav., *a*). Jei kampas B bukasis, tai $CD=a\cdot\sin(180°-B)=a\cdot\sin B$ (19 pav., *b*). Iš sta-



19 pav.

čiojo trikampio ACD randame $CD=b\cdot\sin A$. Taigi $a\cdot\sin B=b\cdot\sin A$. Iš čia

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Per viršūnę B nubrėžę aukštinę, panašiai gautume lygybę

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Iš paskutinių dviejų lygybių išplaukia (1) lygybės.

Remiantis sinusų teorema, nesunku įrodyti, kad trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė ir prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas.

2 (kosinusų) teorema. *Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai minus dviguba sandauga tų kraštinių ir tarp jų esančio kampo kosinuso.*

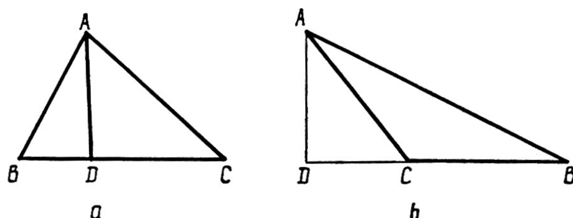
Įrodymas. Sakykime, ABC — duotasis trikampis (20 pav.). Įrodysime, kad

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C. \tag{2}$$

Trikampyje ABC kampas C gali būti: 1) statusis; 2) smailusis; 3) bukasis.

1) Jeigu kampas C yra statusis, tai $\cos C=0$, ir (2) formulė virsta Pitagoro teorema: $c^2=a^2+b^2$. Todėl kosinusų teorema kartais vadinama apibendrintąja Pitagoro teorema.

2) Jeigu kampas C — smailusis, tai trikampyje ABC bus dar bent vienas smailusis kampas, pavyzdžiui B (20 pav., a). Iš viršūnės A



20 pav.

nubrėžę aukštinę AD, gauname du stačiuosius trikampius ACD ir ABD. Iš stačiojo trikampio ACD randame $CD=b\cdot\cos C$ ir $AD^2=b^2-CD^2$, o iš trikampio ABD — $c^2=AD^2+DB^2=AD^2+(a-CD)^2=AD^2+a^2-2a\cdot CD+CD^2$. Į paskutinę lygybę įrašę CD ir AD^2 išraiškas, gauname

$$c^2=b^2-CD^2+a^2-2a\cdot CD+CD^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C.$$

3) Sakykime, kampas C yra bukasis. Iš viršūnės A nubrėžę aukštinę CD, gauname du stačiuosius trikampius ACD ir ABD (20 pav., b). Iš trikampio ABD randame $c^2=AD^2+BD^2=AD^2+(a+CD)^2$, o iš trikampio ACD — $AD^2=b^2-CD^2$ ir $CD=b\cdot\cos(180°-C)=-b\cdot\cos C$. Kaip ir antruoju atveju,

$$c^2=b^2-CD^2+a^2+2a\cdot CD+CD^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C.$$

Nagrinėsime keturis trikampių sprendimo **atvejus.**

I. *Trikampio sprendimas, kai žinomos dvi kraštinės a, b ir kampas tarp jų C.*

Kraštinę c randame iš (2) formulės: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}$ pagal programą

a [×] [=] [F] [ЗП] b [×] [=] [F] [П+] 2 [×]
a [×] b [×] C [F] [cos] [=] [F] [П−]
[F] [ИП] [F] [$\sqrt{x}$].

Kampą A randame pagal formulę $\sin A=\frac{a\sin C}{c}$:

C [F] [sin] [×] a [:] c [=] [ARC] [sin].

Pažymėsime, kad formulę tenkina rastoji kampo A reikšmė ir $180°-A$ reikšmė. Iš šių reikšmių reikia imti tą, kuri tenkina žinomas sąlygas: prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas ir trikampio kampų suma lygi $180°$.

Kampą B randame pagal formulę $\sin B=\frac{b\cdot\sin C}{c}$, atsižvelgę į ankstesnę pastabą, arba pagal formulę $B=180°-A-C$.

Naudojantis formule $S=\frac{1}{2}a\cdot AD=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin C$ (20 pav.), galima rasti trikampio plotą.

Pavyzdžiai. 1. Duota: $a=35{,}6$, $b=27{,}4$, $C=73°\,38'$. Rasime c, A, B, S.

1) Apskaičiuojame c:

35,6 [×] [=] [F] [ЗП] 27,4 [×] [=] [F] [П+]

2 [×] 35,6 [×] 27,4 [×] [[(] 38 [:] 60 [+]

73 [)]] [F] [cos] [=] [F] [П−] [F] [ИП] [F] [$\sqrt{x}$] ;

$c=38{,}32\approx 38{,}3$.

2) Apskaičiuojame A:

38 [:] 60 [+] 73 [=] [F] [sin] [×] 35,6 [:]

38,32 [=] [ARC] [sin] ;

$A=63{,}05°=63°\,3'$ ($A<C$, nes $a<c$!).

3) Panašiai, kaip ir skaičiuodami A, gauname $B=43°\,19'$.

4) Apskaičiuojame plotą S:

38 [:] 60 [+] 73 [=] [F] [sin] [×] 35,6 [×]

27,4 [:] 2 [=] ; $S=467{,}96$.

4) Kontrolei apskaičiuojame $A+B+C=73°\,38'+63°\,3'+43°\,19'=$ $=180°$.

2. Duota: $a=92{,}4$, $b=45{,}7$, $C=24°$. Rasime c, A, B.

1) Apskaičiuojame c:

92,4 [×] [=] [F] [ЗП] 45,7 [×] [=] [F] [П+]

2 [×] 92,4 [×] 45,7 [×] 24 [F] [cos] [=] [F] [П−]

[F] [ИП] [F] [$\sqrt{x}$] ; $c=53{,}95$.

2) Apskaičiuojame kampą A:

24 [F] [sin] [×] 92,4 [:] 53,95 [=] [ARC] [sin]; $A=44° 9'$.

Tačiau ši reikšmė netenkina lygybės $A+B+C=180°$, nes $B<C$. Vadinasi, kampas A lygus $180°-44° 9'=135° 51'$.

3) Apskaičiuojame kampą B:

24 [F] [sin] [×] 45,7 [:] 53,95 [=] [ARC] [sin];

$B=20{,}15°=20° 9'$.

4) Kontrolei apskaičiuojame $A+B+C=135° 51'+20° 9'+24°=$ $=180°$.

II. *Trikampio sprendimas, kai duota kraštinė a ir du kampai B ir C.*

Kadangi trikampio kampų suma lygi 180°, tai $A=180°-B-C$. Kraštinę b rasime iš sinusų teoremos: $b=\frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$, taikydami programą

B [F] [sin] [×] a [:] A [F] [sin] [=].

Kraštinę c rasime pagal formulę $c=\frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$.

3 pavyzdys. Duota: $a=62{,}3$, $B=69°15'$, $C=15° 25'$. Rasime A, b ir c.

1) Apskaičiuojame kampą A: $A=180°-69°15'-15°25'=95°20'$.

2) Apskaičiuojame b:

15 [:] 60 [+] 69 [=] [F] [sin] [×] 62,3 [:] [[(]

20 [:] 60 [+] 95 [)]] [F] [sin] [=]; $b=58{,}51 \approx 58{,}5$.

3) Analogiškai apskaičiuojame c: $c=16{,}63 \approx 16{,}6$.

4) Kontrolei apskaičiuojame kampą C pagal formulę $\sin C=$ $=\frac{c \cdot \sin B}{b}$ ir gauname $C=15{,}41°=15° 25'$.

III. *Trikampio sprendimas, kai duotos trys kraštinės.*

Taikydami kosinusų teoremą, randame vieną trikampio kampą, pavyzdžiui C: $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Naudojamės programa

a [×] [=] [F] [ЗП] b [×] [=] [F] [П+] c [×]

[=] [F] [П−] [F] [ИП] [:] 2 [:] a [:] b

[=] [ARC] [cos].

Panašiai galima rasti ir kitus kampus, tačiau paprasčiau jų ieškoti taikant sinusų teoremą.

4 pavyzdys. Duota: $a=5{,}27$, $b=6{,}15$, $c=10{,}42$. Rasime A, B, C.

1) Apskaičiuojame C:

5,27 [×] [=] [F] [ЗП] 6,15 [×] [=] [F] [П+] 10,42 [×] [=] [F] [П−] [F] [ИП] [:] 2 [:] 5,27 [:] 6,15 [=] [ARC] [cos] ; $C=131{,}54°=131°\,32'$.

2) Kampą A skaičiuosime pagal formulę $\sin A=\frac{a\cdot\sin C}{c}$:

131,54 [F] [sin] [×] 5,27 [:] 10,42 [=] [ARC] [sin] ; $A=22°\,15'$.

3) Panašiai pagal formulę $\sin B=\frac{b\cdot\sin C}{c}$ apskaičiuojame B: $B=26°\,13'$.

4) Kontrolei apskaičiuojame $A+B+C=131°\,32'+22°\,15'+$ $+26°\,13'=180°$.

IV. *Trikampio sprendimas, kai duotos dvi kraštinės a, b ir kampas, esantis prieš vieną iš jų, pavyzdžiui, kampas A.*

Remdamiesi sinusų teorema, gauname

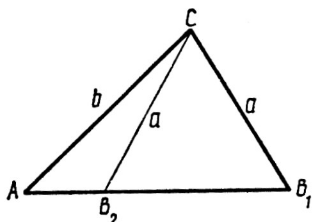
$$\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}.$$

Priklausomai nuo a, b ir A reikšmių, galimi trys atvejai:

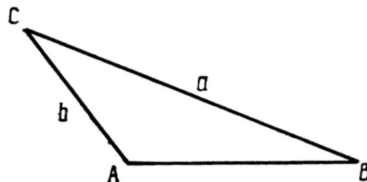
1) jeigu $\frac{b\cdot\sin A}{a}>1$, tai sprendinio nėra ($\sin B>1$!);

2) jeigu $\frac{b\cdot\sin A}{a}=1$, tai $B=90°$ (trikampis statusis);

3) jeigu $\frac{b\cdot\sin A}{a}<1$, tai yra du kampai B_1 ir $B_2=180°-B_1$ (smailusis ir bukasis), kurių sinusas lygus tam pačiam skaičiui.



21 pav.



22 pav.

Jeigu $b>a$, tai uždavinys turi du sprendinius (21 pav.).

Jeigu $b<a$, tai uždavinys turi tik vieną sprendinį ($B<A$ ir kampas B negali būti bukasis) (22 pav.).

Kampą C skaičiuojame pagal formulę $C=180°-A-B$, o kraštinę c — pagal formulę $c=\frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$.

5 pavyzdys. Duota: $a=3{,}5$, $b=4{,}7$, $A=42°\,32'$. Rasime B, C ir c.

1) Apskaičiuojame kampą B:

32 [:] 60 [+] 42 [=] [F] [sin] [×] 4,7 [:]

3,5 [=] [ARC] [sin] ; $B=65{,}20°=65°\,12'$.

Kadangi $b>a$, tai galimos dvi kampo B reikšmės: $B_1=65°\,12'$ ir $B_2=180°-65°\,12'=114°48'$.

2) Apskaičiuojame kampą C: $C_1-180°-42°\,32'-65°\,12'=72°\,16'$, $C_2=180°-114°\,48'-42°\,32'=22°\,40'$.

3) Apskaičiuojame c_1 ir c_2:

16 [:] 60 [+] 72 [=] [F] [sin] [×] 3,5 [:] [((32

[:] 60 [+] 42 [)]] [F] [sin] [=] ; $c_1=4{,}93\approx4{,}9$.

Į šią programą vietoje C_1 įrašę C_2 reikšmę gauname $c_2\approx2$. Taigi gavome du sprendinius. Patikrinkite savarankiškai.

6 pavyzdys. Duota $a=12{,}17$, $b=5{,}24$, $A=81°$. Rasime B, C ir c.

1) Apskaičiuojame kampą B:

81 [F] [sin] [×] 5,24 [:] 12,17 [=] [ARC] [sin] ;

$B=25°\,10'$.

Kadangi $b<a$, tai kampas B negali būti bukasis.

2) Apskaičiuojame kampą C: $C=180°-81°-25°\,10'=73°\,50'$.

3) $c=12{,}35$.

2.5.3. Praktiniai trikampių sprendimo pavyzdžiai. 1. Rasime atstumą nuo punkto B iki neprieinamo, bet matomo objekto A (23 pav.).

Pasirenkame punktą C, iš kurio matomas objektas A. Išmatavę atstumą $BC=a$ ir kampus B ir C, gauname II trikampių sprendimo atvejį: žinoma trikampio ABC kraštinė a ir du kampai, o reikia rasti kraštinę $AB=c$.

Iš sinusų teoremos gauname

$$c=\frac{a \cdot \sin C}{\sin A}=\frac{a \cdot \sin C}{\sin(180°-(B+C))}=\frac{a \cdot \sin C}{\sin(B+C)}.$$

2. Rasime atstumą tarp dviejų neprieinamų objektų A ir B (24 pav.). Pasirenkame du punktus C ir D, iš kurių matomi abu objektai. Išmatuojame atstumą CD ir kampus $\widehat{ACD}=\alpha$, $\widehat{BCD}=\beta$, $\widehat{CDA}=\gamma$, $\widehat{CDB}=\delta$. Iš trikampio ACD (žinoma kraštinė CD ir du kampai α, γ) randame kraštinę AC:

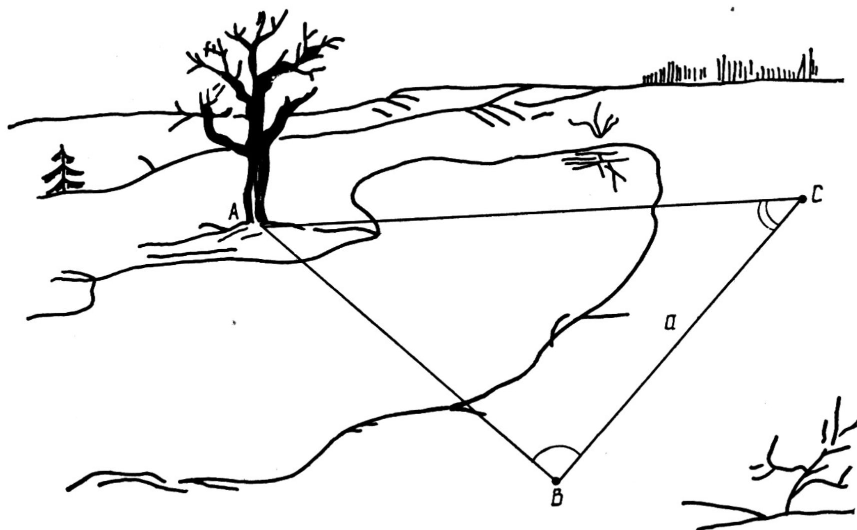
$$AC=\frac{DC \cdot \sin\gamma}{\sin(180°-(\alpha+\gamma))}=\frac{DC \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

o iš trikampio *BCD* — kraštinę *BC:*

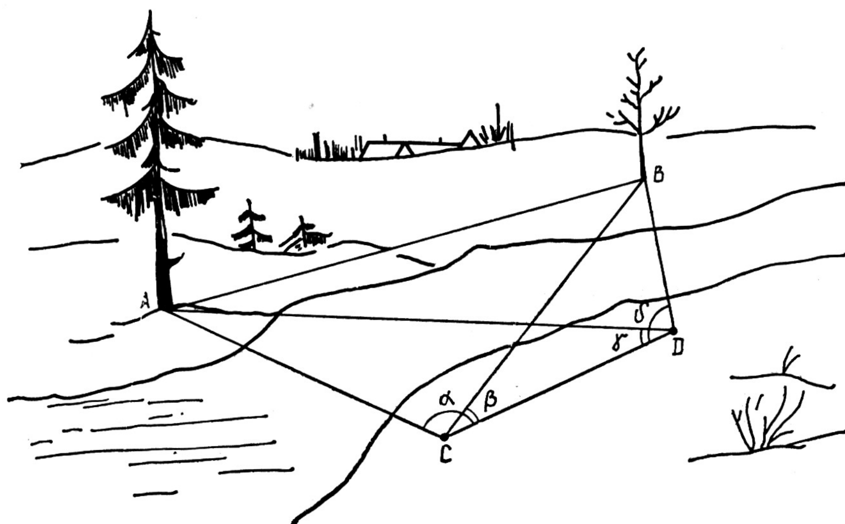
$$BC=\frac{DC\cdot\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}.$$

Iš trikampio *ACB* (žinomos dvi kraštinės ir kampas tarp jų) pagal kosinusų teoremą randame *AB:*

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos(\alpha-\beta)}.$$

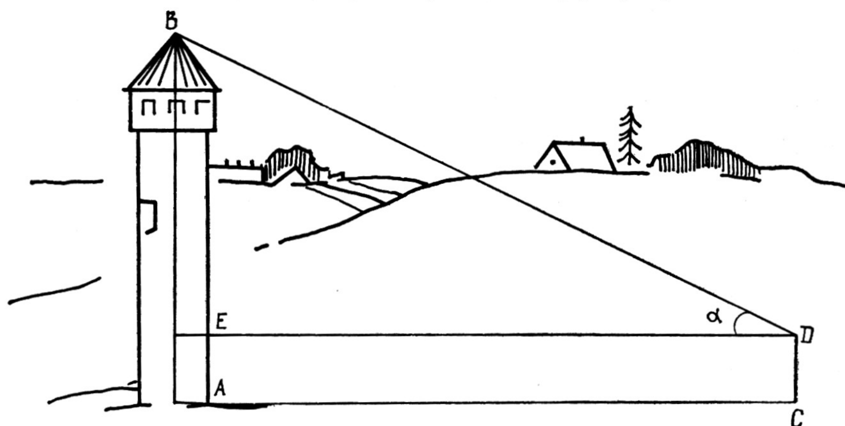


23 pav.



24 pav.

3. Rasime bokšto, prie kurio galima prieiti, aukštį (25 pav.).

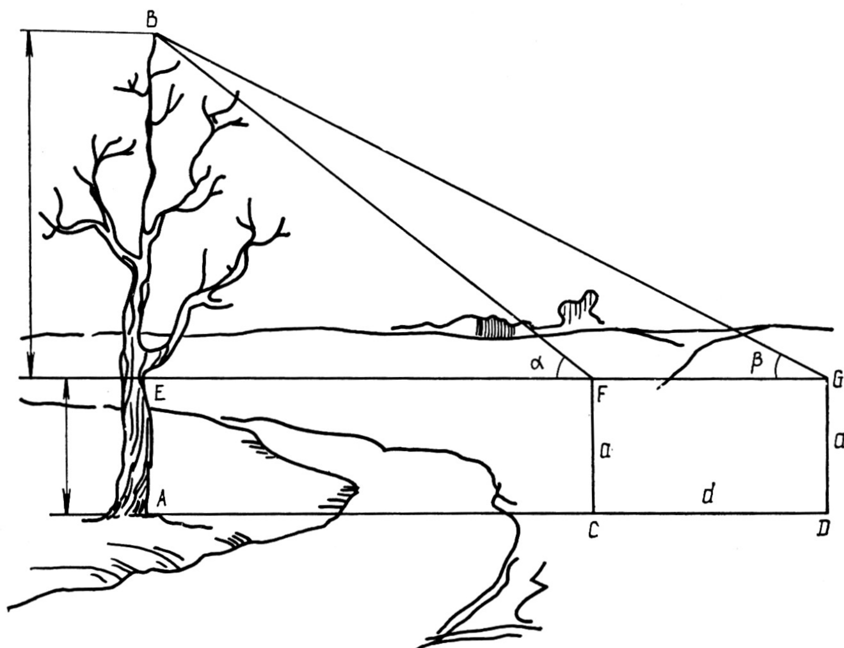


25 pav.

Pasirenkame punktą C, iš kurio matyti bokšto viršūnė B, ir išmatuojame atstumą iki bokšto pagrindo $AC=d$. Žmogaus akių aukštyje $DC=a$ išmatuojame kampą $\widehat{BDE}=\alpha$. Iš stačiojo trikampio BDE randame EB:

$$EB=DE\cdot \text{tg } \alpha=d\cdot \text{tg } \alpha.$$

Bokšto aukštis $AB=AE+EB=a+d\cdot \text{tg } \alpha$.



26 pav.

4. Rasime medžio, prie kurio negalima prieiti, aukštį (26 pav.).

Vienoje tiesėje su medžio pagrindu pasirenkame du punktus C ir D, iš kurių matyti medžio viršūnė B. Išmatuojame atstumą $CD=d$ ir kampus $\widehat{BFE}=\alpha$, $\widehat{BGF}=\beta$. Žinoma trikampio BFG kraštinė $FG=CD=d$ ir kampai $\widehat{BFG}=180°-\alpha$, $\widehat{BGF}=\beta$. Remdamiesi sinusų teorema randame BF:

$$\frac{BF}{\sin\beta}=\frac{FG}{\sin\widehat{FBG}}, \quad BF=\frac{d\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Iš stačiojo trikampio BFE randame BE:

$$BE=BF\cdot\sin\alpha=\frac{d\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Iš čia $AB=AE+EB=a+\dfrac{d\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

2.6. Pratimai

1. Paprastąsias trupmenas išreikškite dešimtainėmis trupmenomis: 1) $\frac{47}{90}$; 2) $\frac{127}{990}$; 3) $\frac{231}{900}$; 4) $\frac{6}{7}$; 5) $\frac{9}{13}$.

2. Dešimtaines trupmenas išreikškite paprastosiomis trupmenomis: 1) 2,2(3); 2) 0,1(94); 3) 0,21(4); 4) 0,24(7); 5) 5,1(32).

3. Įrodykite, kad skaičiai $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ yra iracionalūs.

4. Palyginkite skaičius: 1) $x=7{,}3429...$ ir $y=7{,}3431...$; 2) $x=25{,}4261...$ ir $y=25{,}4258...$; 3) $x=0{,}3519...$ ir $y=0{,}3523...$; 4) $x=-5{,}493...$ ir $y=-5{,}487...$; 5) $x=0{,}001$ ir $y=-0{,}0003...$

5. Koordinačių ašyje nurodykite taškus, kurių koordinatės tenkina šias nelygybes: 1) $|x|<2$; 2) $|x|\leqslant4$; 3) $|x|>5$; 4) $|x|\geqslant7$; 5) $|x|=9$; 6) $|x-1|\geqslant2$; 7) $|x+2|\leqslant5$; 8) $|x-3|=4$; 9) $|x+2|=|x-4|$; 10) $|x+4|=|x-10|$.

6. Nurodykite artinių patikimus skaitmenis: 1) $x=0{,}0526\pm0{,}001$; 2) $x=0{,}4215\pm0{,}02$; 3) $x=25{,}748\pm0{,}01$; 4) $x=7253\pm10$; 5) $x=4527\pm200$.

7. Raskite artinių patikimus skaitmenis plačiąja ir siaurąja prasme: 1) $x=3{,}56\pm0{,}03$; 2) $x=5{,}2787\pm0{,}0006$.

8. Suapvalinkite artinius, palikdami tik patikimus skaitmenis: 1) $x=4{,}2319\pm0{,}003$; 2) $x=25{,}4217\pm0{,}001$; 3) $x=5{,}7358\pm0{,}002$; 4) $x=41{,}3276\pm0{,}001$; 5) $x=0{,}2839\pm0{,}0008$.

9. Suapvalinkite artinius iki: a) šimtųjų; b) dešimtųjų; c) vienetų ir nurodykite absoliučiosios paklaidos rėžį (su vienu reikšminiu skaitmeniu): 1) $x=4{,}3767\pm0{,}4$; 2) $x=45{,}267\pm0{,}04$; 3) $x=39{,}2578\pm0{,}001$; 4) $x=126{,}8341\pm0{,}0001$; 5) $x=0{,}8434\pm0{,}003$.

10. Raskite artinių santykinės paklaidos rėžį: 1) $x\approx4{,}75$; 2) $x\approx47{,}50$; 3) $x\approx4750$; 4) $x\approx0{,}00475$; 5) $x\approx475\cdot10^4$; 6) $x=45{,}2\pm0{,}3$; 7) $x=0{,}00578\pm0{,}00004$; 8) $x=7925\pm40$; 9) $x=1457\pm300$; 10) $x=0{,}74\pm0{,}02$.

11. Paprastąsias trupmenas išreikškite dešimtainėmis trupmenomis ir jas suapvalinkite iki 2 ženklų po kablelio. Raskite artinių absoliučiosios ir santykinės paklaidos rėžius: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{4}{11}$; 5) $\frac{7}{13}$.

12. Palyginkite dviejų matavimų tikslumą: vagono masės $M=62\pm0{,}5$ t ir vaistų dozės $m=0{,}25\pm0{,}01$ g.

13. Matuojant įtampą grandinės dalyje voltmetras rodo 180 V. Šio prietaiso santykinės paklaidos rėžis 0,5%. Koks matavimo tikslumas?

14. Atlikite veiksmus su artiniais ir raskite rezultato patikimus skaitmenis: 1) $2{,}74+132{,}2437-47{,}4$; 2) $3{,}9+4{,}583-0{,}0075$; 3) $34\cdot10^2+343\cdot10-27{,}84$.

15. Atlikite nurodytus veiksmus: 1) $0{,}4721+5{,}4$; 2) $0{,}3\cdot2{,}7415$; 3) $5{,}2596-8{,}0$; 4) $25{,}4\cdot19{,}8$; 5) $4273{,}1\cdot3{,}2$; 6) $1{,}00:0{,}937$; 7) $2{,}43:1{,}285$; 8) $1{,}02:2{,}3517$; 9) $3{,}427:2{,}9$; 10) $15{,}7:0{,}0017$.

16. Apskaičiuokite: 1) $\sqrt[3]{2{,}71}$; 2) $(1{,}043)^4$; 3) $\sqrt[3]{0{,}045}$; 4) $(0{,}053)^4$; 5) $(2{,}50)^4$.

17. Apskaičiuokite artinių sandaugą ir raskite patikimus skaitmenis: 1) $35{,}4\cdot0{,}27$; 2) $(7{,}45\pm0{,}005)(4{,}23\pm0{,}003)$; 3) $(1{,}24\pm0{,}005)(0{,}543\pm0{,}004)$.

18. Apskaičiuokite artinių dalmenį ir raskite patikimus skaitmenis: 1) $7{,}45:3{,}23$; 2) $(5{,}27\pm0{,}005):(2{,}83\pm0{,}004)$; 3) $24{,}7:0{,}219$.

19. Raskite artinių santykinės paklaidos rėžį: 1) $25{,}6\pm0{,}2$; 2) $(4{,}25\pm0{,}02)^2$; 3) $\sqrt[3]{27{,}4}$; 4) $3{,}5^3$; 5) $\sqrt[3]{7{,}67}$.

20. Stačiakampio gretasienio pagrindas — kvadratas, kurio kraštinė $x\approx8{,}4$ cm ir aukštinė $H\approx136$ cm. Naudodamiesi formule $V=x^2H$, apskaičiuokite gretasienio tūrį. Kelis patikimus skaitmenis gausite atsakyme?

21. Raskite stačiakampio įstrižainę, jeigu jo kraštinės yra $x\approx32{,}7$, $y\approx45{,}3$. Kelis patikimus skaitmenis gausite atsakyme?

22. Stiklinės plokštelės tūris $V\approx156$ cm³. Naudodamiesi formule $m=\varrho V$, raskite jos svorį, kai stiklo tankis $\varrho=2{,}6$ g/cm³.

23. Naudodamiesi formule $T=2\pi\sqrt{l/g}$, apskaičiuokite švytuoklės periodą, jeigu $l\approx120$ cm, $g\approx9{,}81$ m/s², $\pi\approx3{,}14$.

24. Kokiu tikslumu reikia išmatuoti kambario ilgį, plotį ir aukštį, kad jo tūrio absoliučioji paklaida būtų ne didesnė už 1 dm³? Kambario matmenų artiniai yra $x\approx40$ dm, $y\approx30$ dm, $z\approx25$ dm.

25. Kūgio tūris apskaičiuojamas pagal formulę $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Kokiu tikslumu reikia išmatuoti spindulį R ir aukštinę H, kad tūrio paklaida būtų ne didesnė už 0,5 dm³? Spindulio ir aukštinės artiniai atitinkamai lygūs 60 cm ir 130 cm.

26. Kokiu tikslumu reikia išmatuoti statojo trikampio statinius, kad įžambinės santykinės paklaidos rėžis būtų ne didesnis už 2%? Trikampio statinių artiniai — 50 cm ir 80 cm.

27. Kokiu tikslumu reikia išmatuoti kvadrato kraštinę, kad jo ploto santykinės paklaidos rėžis būtų ne didesnis kaip 1%? Kraštinės ilgio artinys — 9 m.

28. Kokiu tikslumu reikia išmatuoti stačiojo ritinio aukštinę ir spindulį, kad jo tūrio santykinės paklaidos rėžis būtų ne didesnis kaip 1%? Aukštinės ir spindulio artiniai atitinkamai lygūs 30 cm ir 20 cm.

29. Išspręskite stačiuosius trikampius, kai žinomas statinis ir smailusis kampas: 1) $a=25{,}7$, $A=42°27'$; 2) $b=4{,}26$, $A=63°14'$; 3) $a=31{,}45$, $B=25°35'$; 4) $a=4{,}3$, $B=73°15'$; 5) $b=3{,}8$, $B=40°23'$.

30. Išspręskite stačiuosius trikampius, kai žinomi abu statiniai: 1) $a=3{,}5$, $b=5{,}1$; 2) $a=27{,}4$, $b=9{,}15$; 3) $a=17{,}21$, $b=25{,}16$; 4) $a=0{,}75$, $b=0{,}61$; 5) $a=14{,}3$, $b=37{,}5$.

31. Išspręskite stačiuosius trikampius, kai žinoma įžambinė ir statinis: 1) $c=39{,}5$, $a=15{,}7$; 2) $c=12{,}36$, $b=10{,}12$; 3) $c=8{,}23$, $a=5{,}47$; 4) $c=0{,}95$, $b=0{,}53$; 5) $c=64{,}57$, $a=38{,}95$.

32. Išspręskite trikampius, kai duotos dvi kraštinės ir tarp jų esantis kampas: 1) $a=13{,}4$, $b=9{,}5$, $C=63°30'$; 2) $b=5{,}37$, $c=15{,}2$, $A=129°45'$; 3) $a=14{,}3$, $c=11{,}7$, $B=92°27'$; 4) $a=40{,}1$, $b=32{,}6$, $C=115°43'$; 5) $c=24{,}1$, $b=17{,}9$, $A=15°30'$.

33. Išspręskite trikampius, kai žinoma kraštinė ir du kampai: 1) $a=16{,}7$, $B=31°45'$, $C=47°23'$; 2) $a=1{,}37$, $A=53°14'$, $C=95°39'$; 3) $b=4{,}9$, $B=39°28'$, $C=29°14'$; 4) $c=10{,}7$, $A=132°20'$, $C=28°36'$; 5) $b=25{,}6$, $A=73°13'$, $C=92°23'$.

34. Išspręskite trikampius, kai duotos trys kraštinės: 1) $a=2{,}3$, $b=3{,}2$, $c=4{,}1$; 2) $a=9{,}3$, $b=2{,}8$, $c=7{,}4$; 3) $a=14{,}25$, $b=25{,}08$, $c=17{,}32$; 4) $a=22{,}9$, $b=16{,}7$, $c=38{,}6$; 5) $a=53{,}27$, $b=20{,}84$, $c=37{,}15$.

35. Išspręskite trikampius, kai duotos dvi kraštinės ir kampas prieš vieną iš jų: 1) $a=10{,}3$, $b=3{,}9$, $A=115°47'$; 2) $c=26{,}4$, $a=8{,}7$, $C=121°35'$; 3) $b=35{,}16$, $c=11{,}37$, $B=142°50'$; 4) $b=2{,}1$, $c=3{,}9$, $B=60°15'$; 5) $a=5{,}92$, $b=8{,}07$, $A=29°45'$.

36. Apskaičiuokite skaičiuotuvu:

1) $\frac{3{,}5\cdot 2{,}7+4{,}5:3{,}2}{4{,}3-2{,}5\cdot 9{,}2}$; 2) $\frac{3{,}6+4{,}5\cdot 23{,}4}{3{,}5\cdot 27{,}3-4{,}8}$; 3) $\frac{12{,}35:4{,}34+25{,}71\cdot 3{,}26}{25{,}31-4{,}63\cdot 27{,}42}$;

4) $\frac{12{,}5:2{,}81-3{,}4\cdot 0{,}25}{16{,}2-5{,}31\cdot 1{,}8}$; 5) $\frac{42{,}3\cdot 2{,}71+3{,}45:1{,}25}{38{,}2-8{,}93\cdot 3{,}25}$; 6) $2{,}5^{-3,2}$; 7) $1{,}2^{5,1}$;

8) $\sqrt[4]{16{,}25}$; 9) $\sqrt[5]{32{,}16}$; 10) $\sqrt[3]{123{,}8}$; 11) $\sqrt{0{,}0000524}$; 12) $\sqrt{4{,}25\cdot 10^5}$;

13) $\sqrt[3]{8{,}1725\cdot 10^{-4}}$; 14) $\sqrt[3]{8{,}427\cdot 10^7}$; 15) $\sqrt{9{,}172\cdot 10^7}$; 16) $\frac{0{,}24^3\cdot\sqrt{4{,}28}}{\sqrt[3]{8{,}2}}$;

17) $\frac{3{,}4^3\cdot\sqrt[3]{26{,}4}}{1{,}79^2\cdot\sqrt{9{,}08}}$; 18) $\frac{0{,}823^3\cdot\sqrt{4{,}17}}{0{,}163^2\cdot\sqrt[3]{63{,}5}}$; 19) $\frac{0{,}067^2\cdot\sqrt[4]{15{,}4}}{0{,}823^3\cdot\sqrt{3{,}86}}$;

20) $\frac{23{,}4^2\cdot\sqrt[3]{0{,}85}}{3{,}28^3\cdot\sqrt{4{,}15}}$; 21) $\sqrt[3]{3{,}7^3+2{,}5^2}$; 22) $\sqrt[3]{2{,}6^4-3{,}4^2}$; 23) $\sqrt[3]{3{,}61^{2,5}+\sqrt[3]{8{,}25}}$;

24) $\sqrt[5]{2{,}40^{3,1}-\sqrt[4]{16{,}35}}$; 25) $\sqrt[4]{4{,}7^{3,5}-2{,}5^{3,2}}$.

37. Sudarykite programas reiškiniams apskaičiuoti:

1) $\sqrt{b^2-4ac}$; 2) ax^2+bx+c; 3) ax^3+bx^2+cx+d; 4) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$; 5) $\left(\frac{ax^2-b}{\sqrt{x-c}}\right)^2$.

2.7. Atsakymai

1. 1) 0,5(2); 2) 0,1(28); 3) 0,25(6); 4) 0,(857142); 5) 0,(692307). **2.** 1) $2\frac{21}{90}$; 2) $\frac{193}{990}$; 3) $\frac{193}{900}$; 4) $\frac{223}{900}$; 5) $5\frac{131}{990}$. **4.** 1) $x<y$; 2) $x>y$; 3) $x<y$; 4) $x<y$; 5) $x>y$. **6.** 1) 0, 0, 5, 2; 2) 0, 4; 3) 2, 5, 7, 4; 4) 7, 2, 5; 5) 4. **7.** 1) 3, 5 — abiem prasmėmis; 2) 5, 2, 7, 8 — plačiąja prasme ir 5, 2, 7 — siaurąja prasme. **8.** 1) 4,23; 2) 25,42; 3) 5,74; 4) 41,33; 5) 0,284. **9.** 1) a) 4,38±0,5, b) 4,4±0,5, c) 4±0,8; 2) a) 45,27±0,05, b) 45,3±0,08, c) 45±0,3; 3) a) 126,83±0,005, b) 126,8±0,04, c) 127±0,2; 4) a) 39,26±0,004, b) 39,3±0,05, c) 39±0,3; 5) a) 0,843±0,004, b) 0,8±0,05; c) 1±0,2. **10.** 1) 0,3%; 2) 0,03%; 3) 0,03%; 4) 0,3%; 5) 0,3%; 6) 0,7%; 7) 0,7%; 8) 0,6%; 9) 20,6%; 10) 2,8%. **11.** 1) 0,67±0,005, 0,6%; 2) 0,33±0,004, 1,3%; 3) 0,14±0,003, 2,2%; 4) 0,36±±0,004, 1,2%; 5) 0,54±0,002, 0,4%. **12.** Vagono masė išmatuota tiksliau. **13.** Ne didesnis už 0,9. **14.** 1) 87,6, 8, 7; 2) 8,5, 8; 3) 6800, 6, 8. **15.** 1) 5,9; 2) 0,8; 3) −2,7; 4) 503; 5) $14\cdot 10^3$; 6) 1,07; 7) 1,89; 8) 0,434; 9) 1,2; 10) $92\cdot 10^2$. **16.** 1) 1,39; 2) 1,183; 3) 0,36; 4) 0,0000079; 5) 39,1. **17.** 1) 9,6; 9; 2) 31,5; 3, 1; 3) 0,673; 6,7, 3. **18.** 1) 2,31; 2, 3; 2) 1,86; 1, 8, 6; 3) 112; 1, 1. **19.** 1) 0,4%; 2) 0,95%; 3) 0,13%; 4) 8,6%; 5) 0,05%. **20.** 9600; 9, 6. **21.** 88,9; 8, 8. **22.** 410. **23.** 2,2. **24.** 0,4 cm. **25.** 0,03 cm. **26.** 0,5 cm. **27.** 0,02 cm. **28.** 0,1 cm. **29.** 1) $B=47°33'$, $c=38{,}08$, $b=28{,}1$; 2) $B=26°46'$, $a=8{,}45$, $c=9{,}46$; 3) $A=64°25'$, $b=15{,}06$, $c=34{,}87$; 4) $A=16°45'$, $b=14{,}3$, $c=14{,}9$; 5) $A=49°37'$, $a=4{,}5$, $b=5{,}9$. **30.** 1) $A=34°28'$, $B=55°32'$, $c=6{,}2$; 2) $A=71°32'$, $B=18°28'$, $c=28{,}9$; 3) $A=34°22'$, $B=55°38'$, $c=30{,}49$; 4) $A=50°53'$, $B=39°7'$, $c=0{,}97$; 5) $A=20°53'$, $B=69°7'$, $c=40{,}1$. **31.** 1) $A=23°25'$, $B=66°35'$, $b=36{,}2$; 2) $A=35°2'$, $B=54°48'$, $a=7{,}1$; 3) $A=41°39'$, $B=48°21'$, $b=6{,}15$; 4) $A=56°5'$, $B=33°55'$, $a=0{,}79$; 5) $A=37°6'$, $B=52°54'$, $b=51{,}50$. **32.** 1) $c=12{,}5$, $A=73°39'$, $B=42°51'$; 2) $a=19{,}1$, $B=12°28'$, $C=37°47'$; 3) $b=18{,}9$, $A=49°15'$, $C=38°18'$; 4) $c=61{,}7$, $A=35°51'$, $B=28°26'$; 5) $a=8{,}36$, $C=129°34'$, $B=34°56'$. **33.** 1) $A=100°52'$, $b=8{,}95$, $c=12{,}5$; 2) $B=31°7'$, $b=0{,}884$, $c=1{,}70$; 3) $A=111°18'$, $a=7{,}2$, $c=3{,}8$; 4) $B=19°4'$, $a=16{,}5$, $b=7{,}30$; 5) $B=14°24'$, $a=98{,}6$, $c=102{,}8$. **34.** $A=33°59'$, $B=51°2'$, $C=94°59'$; 2) $A=125°12'$, $B=14°15'$, $C=40°33'$; 3) $A=33°19'$, $B=104°47'$, $C=$

$=41°54'$; 4) $A=15°9'$, $B=10°59'$, $C=153°52'$; 5) $A=131°22'$, $B=17°4'$, $C=31°34'$. **35.** 1) $B=19°56'$, $C=44°17'$, $c=8{,}0$; 2) $A=16°18'$, $B=42°7'$, $b=20{,}78$; 3) $C=11°16'$, $A=25°54'$, $a=25{,}42$; 4) Sprendinių nėra; 5) $B_1=42°34'$, $B_2=137°26'$, $C_1=107°41'$, $C_2=12°49'$, $c_1=11{,}37$, $c_2=2{,}65$. **36.** 1) $-0{,}58$; 2) 1,2; 3) $-0{,}853$; 4) 2,2; 5) 3,07; 6) 0,053; 7) 2,5; 8) 2,008; 9) 2,002; 10) 4,984; 11) 0,00724; 12) 651,9; 13) 0,093494; 14) 438,4; 15) 9577; 16) 0,014; 17) 12; 18) 10,7; 19) 0,081; 20) 7,2; 21) 3,8; 22) 3,2; 23) 2,99; 24) 1,67; 25) 3,8.

3. LYGTYS. NELYGYBĖS. SISTEMOS

3.1. Tiesinė lygtis su vienu kintamuoju. Lygčių ekvivalentumas. Lygčių sprendimas

Spręsdami daugelį praktinių uždavinių susiduriame su įvairiomis lygtimis. Tas lygtis sudarome iš uždavinio sąlygų.

Pavyzdys. Sakykime, dvi brigados kasė bulves. I brigadoje buvo 4 kartus mažiau žmonių negu II brigadoje. Po to, kai iš II brigados 6 žmonės išėjo ir 12 žmonių perėjo į I brigadą, abiejose brigadose jų buvo po lygiai. Kiek žmonių buvo I brigadoje iš pradžių?

Sakykime, I brigadoje buvo x žmonių. Kadangi iš II brigados išėjo 6 žmonės ir 12 perėjo į I brigadą, tai joje liko $4x-18$ žmonių. Be to, 12 žmonių iš II brigados perėjo į I brigadą, taigi po to pastarojoje buvo $x+12$ žmonių. Remdamiesi uždavinio sąlyga rašome

$$x+12=4x-18.$$

Gautoji lygybė yra lygtis su vienu kintamuoju x. Skaičiai 12, 4, 18 — *koeficientai.* $x+12$ ir $4x-18$ — *reiškiniai su kintamaisiais.* Sąvoką „reiškinys su kintamaisiais" paaiškinsime plačiau. Imkime stačiakampį, kurio kraštinės yra a cm ir b cm. Jo plotas $S=ab$ cm². Reiškinyje ab yra du kintamieji a ir b. Pavyzdžiui, kai $a=2$, $b=3$, tai $S=2\cdot3=6$. Skaičius 6 yra reiškinio ab skaitinė reikšmė, kai $a=2$, $b=3$.

Paėmę reiškinį $x(x+2)$ ir vietoje kintamojo įrašę, pavyzdžiui, skaičių 3, gauname skaitinį reiškinį $3(3+2)$, lygų 15. Atkreipiame dėmesį, kad su kiekviena x reikšme reiškinys $x(x+2)$ turi realią reikšmę. Tokiais atvejais sakoma, kad jis yra apibrėžtas su visomis kintamojo x reikšmėmis, t. y. $x\in R$. Kai kurie reiškiniai ne visada apibrėžti. Pavyzdžiui, reiškinys $\frac{2x}{x-5}$ apibrėžtas, kai $x\in R$, $x\neq5$; reiškinys $x+\frac{2y}{x-y}$ apibrėžtas, kai $x\in R$, $y\in R$, $x\neq y$. Kintamųjų reikšmės, su kuriomis reiškinys yra apibrėžtas, vadinamos leistinosiomis kintamųjų reikšmėmis. Jos sudaro reiškinio apibrėžimo sritį.

Apibrėžimas. *Lygybė, teisinga su visomis leistinosiomis kintamųjų reikšmėmis, vadinama tapatybe.*

Du reiškiniai, įgyjantys lygias reikšmes su visomis leistinosiomis kintamųjų reikšmėmis, vadinami tapačiai lygiais. Pavyzdžiui, reiškiniai $\frac{xy}{x^2}$ ir $\frac{y}{x}$ yra tapačiai lygūs su visais $x\neq0$ ir $y\in R$.

Štai keletas tapatybių pavyzdžių:

1. $(x-2)^2=x^2-4x+4, \quad x \in R;$

2. $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1, \quad x \in R;$

3. $\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}, \quad x \in R, \quad x \neq \pm 1;$

4. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)},$

$x \in R, \quad x \neq 2, \quad x \neq 3;$

5. Su visomis leistinosiomis raidžių *a, b, c, d* reikšmėmis lygybės

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

yra tapatybės.

6. Lygybės $3=3$, $5=5$ ir t. t. yra skaitinės tapatybės.

Dabar imkime lygybę $x+12=4x-18$, kurią pavadinome lygtimi. Ją sudarėme iš uždavinio sąlygos. Pažiūrėkime, kokias reikšmes įgyja tos lygybės kairioji ir dešinioji pusė, kai vietoje kintamojo x įrašome įvairius skaičius:

x	5	8	10	15	20
$x+12$	17	20	22	27	32
$4x-18$	2	14	22	42	42

Lentelėje matome, kad lygties $x+12=4x-18$ kairioji ir dešinioji pusės lygios tarpusavyje, kai $x=10$. Šis skaičius vadinamas nagrinėjamosios lygties šaknimi, arba sprendiniu. *Lygties su vienu kintamuoju šaknimi vadinama kintamojo reikšmė, su kuria lygtis tampa teisinga lygybe.* Pavyzdžiui, skaičius 9 yra lygties $4x-8=3x+1$ šaknis, nes lygybė $36-8=27+1$ yra teisinga; skaičius 4 yra lygties $\frac{6u+1}{2u-3}=5$ šaknis, nes lygybė $\frac{24+1}{8-3}=5$ taip pat teisinga.

Išspręsti lygtį su vienu kintamuoju — reiškia rasti visas jos šaknis arba įrodyti, kad jų nėra. Šaknų ieškojimo procesas vadinamas lygties sprendimu. Sprendžiant lygtį, ji keičiama ekvivalenčia paprastesne lygtimi. Lygtys, kurių šaknys vienodos, vadinamos *ekvivalenčiomis.* Šaknų neturinčios lygtys irgi laikomos ekvivalenčiomis.

Lygtį su vienu kintamuoju simboliškai užrašysime šitaip:

$$f(x)=g(x); \qquad (1)$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ — reiškiniai su kintamuoju. Ekvivalenčias lygtis $f(x)=g(x)$ ir $f_1(x)=g_1(x)$ užrašome taip:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f_1(x)=g_1(x).$$

Lygties $f(x)=g(x)$ apibrėžimo sritį sudaro visos kintamojo x reikšmės, su kuriomis reiškiniai $f(x)$ ir $g(x)$ yra apibrėžti. Pavyzdžiui, lygties

$$\frac{1}{x^2-9}=x+\frac{1}{x-5}$$

apibrėžimo sritis yra $x \in R$, $x \neq -3$, $x \neq 3$, $x \neq 5$.

1 teorema. *Jeigu kurį nors dėmenį perkelsime iš vienos lygties pusės į kitą pakeitę jo ženklą priešingu, tai gausime lygtį, ekvivalenčią pradinei.*

Įrodymas. Sakykime, kad lygties $f(x)=g(x)$ dešinioji pusė yra $g(x)=h(x)+p(x)$, tuomet

$$f(x)=h(x)+p(x). \qquad (1)$$

Įrodysime, kad

$$f(x)=h(x)+p(x) \Leftrightarrow f(x)-p(x)=h(x).$$

Tegul $x=b$ yra (1) lygties šaknis. Tai reiškia, kad $f(b)=h(b)+$ $+p(b)$ yra teisinga skaitinė lygybė. Tačiau $f(b)-p(b)=h(b)$ taip pat teisinga skaitinė lygybė, kuri gauta atėmus iš abiejų skaitinės lygybės $f(b)=h(b)+p(b)$ pusių tą patį skaičių $p(b)$. Tai reiškia, kad $x=b$ yra lygties $f(x)-p(x)=h(x)$ šaknis.

Tegul $x=c$ yra lygties $f(x)-p(x)=h(x)$ šaknis. Tuomet $f(c)-$ $-p(c)=h(c)$ — teisinga skaitinė lygybė. Bet $f(c)=p(c)+h(c)$ taip pat teisinga skaitinė lygybė, gauta pridėjus prie abiejų skaitinės lygybės $f(c)-p(c)=h(c)$ pusių tą patį skaičių $p(c)$. Tai reiškia, kad $x=c$ yra lygties $f(x)=p(x)+h(x)$ šaknis. Taigi

$$f(x)-p(x)=h(x) \leftrightarrow f(x)=h(x)+p(x).$$

Pavyzdžiui, $5x-6=3x+4 \Leftrightarrow 5x-3x=4+6 \Leftrightarrow 2x=10$.

2 teorema. *Jeigu lygties $f(x)=g(x)$ abi puses padauginsime arba padalysime iš nelygaus nuliui reiškinio $p(x)$, apibrėžto tos lygties apibrėžimo srityje, tai gausime lygtį, ekvivalenčią pradinei, t. y.*

a) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)p(x)=g(x)p(x)$;

b) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{p(x)}=\dfrac{g(x)}{p(x)}$.

Ši teorema įrodoma panašiai kaip ir pirmoji.

Remdamiesi 2 teorema, lygties $2x=10$ abi puses dalijame iš 2:

$$\frac{2x}{2}=\frac{10}{2} \Leftrightarrow x=5.$$

Lygtis $ax=b$, kurioje x — kintamasis, a ir b — bet kokie realieji skaičiai, vadinama *tiesine lygtimi.*

Jeigu $a \neq 0$, tai abi lygties $ax=b$ puses padaliję iš a gauname vieną šaknį

$$x=\frac{b}{a}.$$

Kai $a=0$, $b \neq 0$, lygtis $ax=b$ šaknų neturi. Pavyzdžiui, lygtis $0 \cdot x=3$ šaknų neturi.

Jeigu $a=0$, $b=0$, lygties $ax=b$ šaknis gali būti bet kuris skaičius, nes lygybė $0 \cdot x=0$ teisinga su visomis x reikšmėmis.

Pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$4\frac{x-2}{3}=2-(x-1).$$

Abi lygties puses padauginę iš 3 ir atlikę nurodytus veiksmus, gauname:

$$4(x-2)=6-3(x-1),$$
$$4x-8=6-3x+3,$$
$$7x=17,$$
$$x=2\frac{3}{7}.$$

Jeigu tiesinė lygtis turi trupmeninių narių, kurių vardiklyje yra kintamasis, tai tokias lygtis sprendžiame šitaip:

1) randame lygties trupmenų bendrąjį vardiklį;
2) dauginame abi lygties puses iš bendrojo vardiklio;
3) sprendžiame gautąją lygtį;
4) atmetame tas kintamojo reikšmes, su kuriomis bendrasis vardiklis lygus nuliui.

Pavyzdžiai. 1. Išspręskime lygtį

$$\frac{x-3}{2x-2}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{3}{2}.$$

Lygties trupmenų vardiklius išskaidome dauginamaisiais:

$$\frac{x-3}{2(x-1)}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{3}{2}.$$

Lygties abi puses padauginame iš bendrojo vardiklio ir gauname lygtį

$$(x-3)(x+1)+2x(x-1)=2+3(x+1)(x-1).$$

Atliekame nurodytus veiksmus:

$$x^2-3x+x-3+2x^2-2x=2+3x^2-3x+3x-3,$$

$$-4x=2, \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Jeigu $x=-\frac{1}{2}$, tai bendrasis vardiklis $2(x+1)(x-1)=2(-\frac{1}{2}+$ $+1)(-\frac{1}{2}-1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}\neq 0.$

Ats. $x=-\frac{1}{2}$.

2. Išspręskime lygtį

$$\frac{3x-1}{6x-3}-\frac{1}{1-4x^2}=\frac{x}{2x+1}.$$

Pakeičiame lygties antrosios trupmenos ženklą ir vardiklius išskaidome dauginamaisiais:

$$\frac{3x-1}{3(2x-1)}+\frac{1}{4x^2-1}=\frac{x}{2x+1},$$

$$\frac{3x-1}{3(2x-1)}+\frac{1}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{x}{2x+1}.$$

Padauginę abi lygties puses iš bendrojo vardiklio, ieškome šaknies:

$$(3x-1)(2x+1)+3=3x(2x-1),$$
$$6x^2+3x-2x-1+3=6x^2-3x,$$
$$4x=-2, \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Jeigu $x=-\frac{1}{2}$, tai $3(2x+1)(2x-1)=3(4x^2-1)=3(4\cdot\frac{1}{4}-1)=$ $=3(1-1)=3\cdot0=0.$

Ats. Sprendinių nėra.

3.2. Tiesinė lygtis su dviem kintamaisiais ir jos sprendiniai

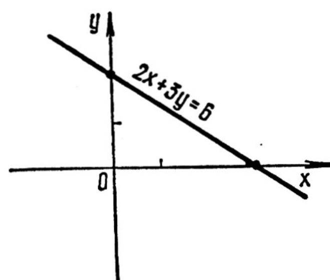
Lygtis $ax+by=c$, kai a, b, c yra skaičiai, o x ir y — kintamieji, vadinama tiesine lygtimi su dviem kintamaisiais. Skaičiai a ir b yra kintamųjų x ir y koeficientai, c — laisvasis narys. Jeigu $b\neq0$, tai kintamąjį y galima išreikšti kintamuoju x. Nagrinėkime lygtį $2x+$ $+3y=6$. Iš jos išreiškę y kintamuoju x, gauname $y=-\frac{2}{3}x+2$. Į šią išraišką įrašę pasirinktas x reikšmes, apskaičiuojame atitinkamas y reikšmes:

$x=0$, $\quad x=3$, $\quad x=6$,
$y=2$; $\quad y=0$; $\quad y=-2$ ir t. t.

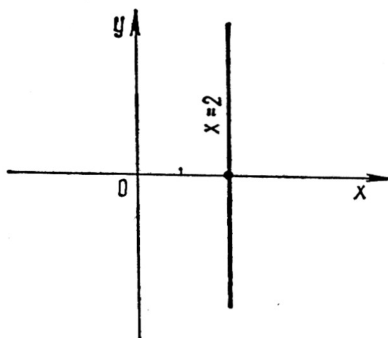
Taigi skaičių poros (0, 2), (3, 0), (6, −2) ir t. t. yra lygties $2x+3y=6$ šaknys, arba sprendiniai.

Kadangi x reikšmių galima pasirinkti kiek norima daug ir kiekvienai jų iš išraiškos $y=-\frac{2}{3}x+2$ galima apskaičiuoti atitinkamą y reikšmę, tai tokia lygtis turi be galo daug sprendinių. Tuo galime įsitikinti nubrėžę tiesinės funkcijos $y=-\frac{2}{3}x+2$ grafiką — tiesę (27 pav., *a*). Bet kurio tiesės taško koordinatės yra lygties $2x+3y=6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+2$ sprendiniai.

Kai $b=0$, $a\neq 0$, lygties $ax+by=c$ grafikas yra tiesė $x=\frac{c}{a}$. Pavyzdžiui, lygties $2x+0y=4$ grafikas yra tiesė $x=2$, pavaizduota 27 paveiksle, *b*. Šios tiesės bet kurio taško (x, y) koordinatės yra lygties $2x+0y=4$ sprendiniai.



a



b

27 pav.

Kai $a=0$ ir $b=0$, lygtis $ax+by=c$ tampa šitokia: $0x+0y=c$. Tuo atveju, kai $c=0$, kiekviena skaičių pora yra šios lygties sprendinys. Minėtosios lygties grafikas yra visa koordinačių sistema. Kai $c\neq 0$, lygtis $0x+0y=c$ neturi sprendinių, todėl negalime nubraižyti ir jos grafiko.

Kaip matome, lygties $ax+by=c$ grafikas yra tiesė, kai bent vienas iš koeficientų a ir b nelygus nuliui. Tos tiesės bet kurio taško koordinatės yra minėtosios lygties šaknys.

3.3. Tiesinių lygčių sistemos, jų ekvivalentumas ir sprendimo būdai

Imkime dvi tiesines lygtis su dviem kintamaisiais x ir y:

$$a_1x+b_1y=c_1, \qquad a_2x+b_2y=c_2.$$

Sakoma, kad jos sudaro lygčių sistemą, jeigu reikia rasti tokias skaičių poras (x, y), kurias įrašius į kiekvieną lygtį gaunamos teisingos skaitinės lygybės. Minėtų lygčių sistemą žymėsime šitaip:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendiniu laikysime tokią sutvarkytą skaičių a ir b porą (a, b), kuri tenkina abi sistemos lygtis, t. y. vietoje x įrašę a ir vietoje y įrašę b, gauname teisingas skaitines lygybes.

Išspręsti lygčių sistemą — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad jų nėra. Spręsdami lygčių sistemas, jas keičiame paprastesnėmis ekvivalenčiomis sistemomis. *Dvi lygčių sistemos vadi-*

namos ekvivalenčiomis, jeigu jų sprendiniai sutampa. Suformuluosime sistemų pertvarkymo į ekvivalenčias sistemas teoremas.

1. *Jeigu sistemos kurią nors lygtį pakeisime jai ekvivalenčia lygtimi, tai gausime sistemą, ekvivalenčią pradinei.*

Pavyzdžiui,

$$\begin{cases} 2x-3y=x+y, \\ 3x-y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y, \\ 3x-y=22. \end{cases}$$

2. *Sudėję abi sistemos lygtis ir jų suma pakeitę kurią nors sistemos lygtį, gauname sistemą, ekvivalenčią pradinei.*

Pavyzdžiui, sudėję sistemos

$$\begin{cases} x+y=6, \\ 3x-4y=4 \end{cases}$$

lygtis, gauname $4x-3y=10$. Šia lygtimi pakeitę pirmąją arba antrąją sistemos lygtį, gauname:

a) $\begin{cases} 4x-3y=10, \\ 3x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6, \\ 3x-4y=4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=6, \\ 4x-3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6, \\ 3x-4y=4. \end{cases}$

3. *Jeigu iš vienos sistemos lygties išreikšime kurį nors kintamąjį (lygtį užrašysime $y=f(x)$ pavidalu) ir tą išraišką įrašysime į kitą lygtį, tai gausime sistemą, ekvivalenčią pradinei.*

Pavyzdžiui,

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x+4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y, \\ 3(5-2y)+4y=11. \end{cases}$$

3.4. Tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdai

3.4.1. Algebrinės sudėties būdas. Šis būdas paremtas tuo, kad sprendžiama pradinei sistemai ekvivalenti sistema, gauta bet kurią pradinės sistemos lygtį pakeitus tos lygties ir kitos lygties, padaugintos iš bet kurio skaičiaus, suma.

Pavyzdžiai. 1. Spręsime sistemą

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 3x-y=2. \end{cases}$$

Sudėję sistemos lygtis panariui, gauname:

$$5x=5, \qquad x=1.$$

Gautąją x reikšmę įrašome į pirmąją lygtį (galima ir į antrąją):

$$2\cdot 1+y=3, \qquad y=1.$$

Ats. (1, 1).

2. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 3x-7y=-1, \\ 6x-14y=-3. \end{cases}$$

Pirmąją sistemos lygtį dauginame iš -2, o antrosios nekeičiame:

$$\begin{cases} -6x+14y=2, \\ 6x-14y=-3. \end{cases}$$

Sudedame šios sistemos lygtis ir gauname $0=1$. Tai rodo, kad sistema sprendinių neturi.

3.4.2. Keitimo būdas. Šiuo būdu sprendžiant lygčių sistemas, pirmiausia kurios nors lygties vienas kintamasis išreiškiamas kitu kintamuoju, po to gautoji išraiška įrašoma į kitą lygtį. Taip gaunama lygtis su vienu kintamuoju.

Pavyzdžiai. 1. Keitimo būdu išspręsime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x-y=6, \\ 3x+4y=20. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties išreiškę y ir įrašę į antrąją, gauname:

$$y=2x-6, \qquad 3x+4(2x-6)=20,$$

$$3x+8x-24=20, \qquad 11x=44, \qquad x=4.$$

Šią x reikšmę įrašę į $y=2x-6$, randame

$$y=2\cdot4-6=2.$$

Ats. (4, 2).

2. Išspręsime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y+3=0. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties išreiškiame $y=-x-1$. Gautąją y išraišką įrašome į antrąją lygtį:

$$2x+2(-x-1)+3=0,$$
$$2x-2x-2+3=0,$$
$$1=0.$$

Gavome prieštarą.

Ats. Sistema sprendinių neturi.

3. Spręsime sistemą

$$\begin{cases} x+y-6=0, \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-3=0. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties išreiškiame y:

$$y=-x+6.$$

Šią išraišką įrašome į antrąją sistemos lygtį:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(-x+6)-3=0,$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x+3-3=0,$$

$$0\cdot x=0.$$

Vietoje kintamojo x įrašę bet kurį skaičių, gauname teisingą lygybę. Tai reiškia, kad bet kokios x, kartu ir y reikšmės tenkina pradinę lygčių sistemą.

Ats. Sistema turi be galo daug sprendinių.

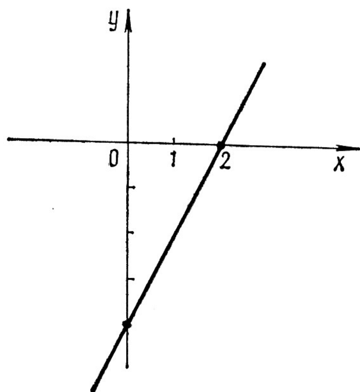
3.4.3. Grafinis sprendimo būdas. Iš pradžių grafiškai išspręskime pirmojo laipsnio lygtį su vienu kintamuoju.

$$2x-4=0.$$

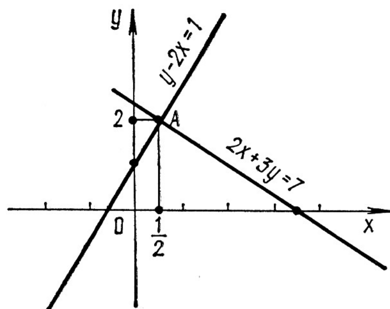
Tuo tikslu kairiąją lygties pusę pažymėkime

$$y=2x-4.$$

Brėžiame šios funkcijos grafiką (28 pav.). Jis kerta ašį Ox taške (2, 0). Šio taško abscisė $x=2$ yra lygties $2x-4=0$ šaknis.



28 pav.



29 pav.

Dabar grafiškai išspręskime sistemą

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ y-2x=1. \end{cases}$$

Brėžiame abiejų lygčių grafikus — tieses. Tiesių susikirtimo taško A koordinatės yra sprendžiamosios lygčių sistemos sprendinys (1/2, 2) (29 pav.).

Jeigu sistemos lygčių grafikai sutampa, tai ji turi be galo daug sprendinių. Tuo atveju, kai sistemos lygčių grafikai yra lygiagrečios tiesės — sistema sprendinių neturi.

Remdamiesi lygčių ir jų sistemų ekvivalentumo savybėmis, išspręskime lygčių sistemą su trimis kintamaisiais:

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ 2x-3y+z=-1, \\ 3x+y-4z=-7. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties panariui atėmę antrąją, gauname

$$-x+4y=10. \qquad (1)$$

Padauginę antrąją lygtį iš 4 ir ją sudėję su trečiąja, gauname

$$11x-11y=-11,$$

arba

$$x-y=-1. \qquad (2)$$

Užrašome (1) ir (2) lygčių sistemą:

$$\begin{cases} -x+4y=10, \\ x-y=-1. \end{cases}$$

Sudėję tos sistemos lygtis, gauname

$$3y=9, \qquad y=3.$$

Šią y reikšmę įrašome į lygtį $x-y=-1$ ir randame $x=2$. Rastąsias x ir y reikšmes įrašę į pirmąją sistemos lygtį, gauname $z=4$. Taigi sistemos sprendinys yra (2, 3, 4).

3.4.4. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Gauso metodu. Sprendžiant šiuo būdu, tiesinių lygčių sistema pertvarkoma į trikampę sistemą (žr. (d) sistemą), iš kurios paskutinės lygties lengvai randama vieno kintamojo reikšmė. Radus vieno kintamojo reikšmę ir įrašius ją į kitas lygtis, randamos ir kitų kintamųjų reikšmės. Toliau Gauso metodą aiškinsime spręsdami sistemą

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-5x_4=2, \\ 4x_1-7x_2-x_3-8x_4=-5, \\ 10x_1-18x_2+2x_3-23x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0. \end{cases} \qquad (a)$$

Pirmąją šios sistemos lygtį dauginame iš -2, sudedame su antrąja ir gauname

$$x_2-3x_3+2x_4=-9. \qquad (1)$$

Po to pirmąją lygtį dauginame iš -5 ir sudedame su trečiąja:

$$2x_2-3x_3+2x_4=-7. \qquad (2)$$

Pagaliau pirmąją lygtį dauginame iš -1 ir sudedame su ketvirtąja sistemos lygtimi:

$$x_2+4x_4=-2. \qquad (3)$$

Pirmąją sistemos lygtį bei (1), (2), (3) lygtis jungiame į sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+\ x_3-5x_4=2, \\ \quad x_2-3x_3+2x_4=-9, \\ \quad 2x_2-3x_3+2x_4=-7, \\ \quad x_2 \qquad +4x_4=-2. \end{cases} \tag{b}$$

Kaip matome, šioje sistemoje kintamasis x_1 liko tik pirmojoje lygtyje. Panašiai pertvarkome ir sistemą (b). Tik šiuo atveju antrąją lygtį dauginame iš -2, sudedame su trečiąja ir gauname

$$3x_3-2x_4=11. \tag{4}$$

Po to antrąją lygtį dauginame iš -1 ir sudedame su ketvirtąja:

$$3x_3+2x_4=7. \tag{5}$$

Sistemos (b) pirmąją ir antrąją bei (4) ir (5) lygtis jungiame į sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+\ x_3-5x_4=2, \\ \quad x_2-3x_3+2x_4=-9, \\ \qquad 3x_3-2x_4=11, \\ \qquad 3x_3+2x_4=7. \end{cases} \tag{c}$$

Gautosios sistemos trečiąją lygtį padauginę iš -1 ir sudėję su ketvirtąja, gauname

$$4x_4=-4. \tag{6}$$

(6) lygtį ir sistemos (c) pirmąją, antrąją ir trečiąją lygtis jungiame į sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+\ x_3-5x_4=2, \\ \quad x_2-3x_3+2x_4=-9, \\ \qquad 3x_3-2x_4=11, \\ \qquad\qquad 4x_4=-4. \end{cases} \tag{d}$$

Šią sistemą lengva išspręsti keitimo būdu radus $x_4=-1$. Įrašę x_4 reikšmę į trečiąją sistemos lygtį, gauname $x_3=3$. Kintamųjų x_4 ir x_3 reikšmes įrašę į antrąją sistemos (d) lygtį, randame $x_2=2$. Pagaliau x_4, x_3, x_2 reikšmes įrašę į sistemos (d) pirmąją lygtį, gauname $x_1=1$. Sistemos sprendinys — skaičių ketvertas $(1, 2, 3, -1)$.

3.4.5. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas naudojantis determinantais. Tiesinių lygčių sistemos sprendinius galima išreikšti tos sistemos lygčių koeficientais. Imkime dviejų lygčių sistemą su dviem kintamaisiais x ir y:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Padauginę pirmąją lygtį iš b_2, o antrąją iš $-b_1$ ir jas sudėję, gauname:

$$\begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1, \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-b_1c_2, \end{cases}$$
$$\overline{a_1b_2x-a_2b_1x=b_2c_1-b_1c_2,}$$

arba

$$x(a_1b_2-a_2b_1)=b_2c_1-b_1c_2,$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \text{ kai } a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

Padauginę pirmąją lygtį iš $-a_2$, o antrąją iš a_1 ir jas sudėję, gauname:

$$\begin{cases} -a_1a_2x-a_2b_1y=-a_2c_1, \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2, \end{cases}$$
$$\overline{a_1b_2y-a_2b_1y=a_1c_2-a_2c_1,}$$

arba

$$y(a_1b_2-a_2b_1)=a_1c_2-a_2c_1,$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \text{ kai } a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

Taigi tuo atveju, kai $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, sistema turi vieną sprendinį

$$\left(\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right).$$

Reiškinį $a_1b_2-a_2b_1$ pažymėkime raide Δ (delta) ir užrašykime šitaip:

$$a_1b_2-a_2b_1=\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Lentelė $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ vadinama antrosios eilės determinantu. Joje skaičiai a_1, b_1 ir a_2, b_2 sudaro determinanto eilutes, o a_1, a_2 ir b_1, b_2 — stulpelius. Iš (1) lygybės aišku, kad bet kurį antrosios eilės determinantą galime apskaičiuoti taip:

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}=ps-rq.$$

Pavyzdžiai. Apskaičiuosime determinantus.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-2\cdot 4=15-8=7.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-1)\cdot 3=8+3=11.$

Reiškinį $b_2c_1-b_1c_2$ pažymėkime Δ_x ir užrašykime šitaip:

$$b_2c_1-b_1c_2=\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Panašiai

$$a_1c_2-a_2c_1=\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Nagrinėjamosios sistemos sprendinį galime užrašyti šitaip:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

arba

$$\boxed{x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.}$$

Šias formules atrado šveicarų matematikas G. Krameris 1750 m., todėl jos ir vadinamos Kramerio formulėmis.

Iš parašytų formulių darome šias išvadas:

1) kai $\Delta \neq 0$, sistema turi vieną sprendinį;

2) kai $\Delta=0$ ir bent vienas iš Δ_x ir Δ_y nelygus nuliui, sistema sprendinių neturi;

3) kai $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ ir bent vienas iš koeficientų prie kintamųjų nelygus nuliui, sistema turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdžiai. Naudodamiesi Kramerio formulėmis, išspręsime tiesinių lygčių sistemas.

1. $\begin{cases} x-y=1, \\ x+2y=3. \end{cases}$

Apskaičiuojame Δ, Δ_x ir Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot2-(-1)\cdot1=3,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot2-3\cdot(-1)=5,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot3-1\cdot1=2.$$

Taigi $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2}{3}$.

Ats. $\left(1\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 4x+6y=5. \end{cases}$

Randame

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=12-12=0,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=24-15=9,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=10-16=-6.$$

Kadangi $\Delta=0$, o $\Delta_x\neq0$ ir $\Delta_y\neq0$, tai sistema sprendinių neturi. *Ats.* Sistema neturi sprendinių.

3. $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2. \end{cases}$

Apskaičiuojame

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0.$$

$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, taigi sistema turi be galo daug sprendinių. Tą galėjome pastebėti ir iš sąlygos. Sistemos

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

antroji lygtis gauta iš pirmosios, pastarąją padauginus iš 2. Vadinasi, iš esmės turime vieną lygtį su dviem kintamaisiais. Kaip žinome, tokia lygtis turi be galo daug sprendinių.

Sprendžiant trijų lygčių sistemą su trimis kintamaisiais

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases}$$

taip pat galima naudotis Kramerio formulėmis:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta};$$

čia

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

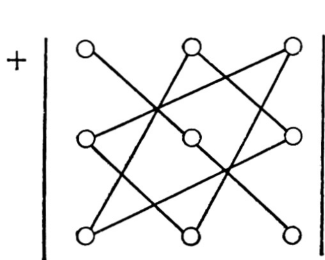
$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

yra trečiosios eilės determinantai.

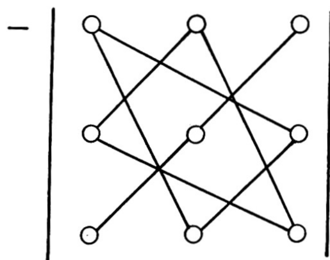
Nurodysime vieną iš būdų trečiosios eilės determinantui apskaičiuoti:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3.$$

Pirmieji trys dėmenys skaičiuojami pagal schemą, nurodytą 30 paveiksle, o kiti trys dėmenys — pagal schemą 31 paveiksle.



30 pav.



31 pav.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2+2\cdot 1\cdot 3+(-1)\cdot 3\cdot 4-3\cdot 2\cdot 3- -1\cdot 4\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 2=4+6-12-18-4+ +4=-20.$$

2. Išspręsime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+3z=7, \\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$$

Apskaičiuojame sistemos determinantą Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+1\cdot 3\cdot 2+1\cdot 3\cdot 1-(-1)\times \times 1\cdot 2-1\cdot 1\cdot(-1)-1\cdot 3\cdot 3=1+6+3+2+ +1-9=4.$$

Determinanto Δ pirmąjį stulpelį (koeficientus prie kintamojo x) pakeitę laisvųjų narių stulpeliu (3, 7, 0), gauname

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3+0+21-0-27+7=4.$$

Determinanto Δ antrąjį stulpelį pakeitę sistemos laisvųjų narių stulpeliu, randame

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7+0+18-14+3-0=0.$$

Determinanto Δ trečiąjį stulpelį pakeitę sistemos laisvųjų narių stulpeliu, apskaičiuojame

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0+14+9+6-21-0=8.$$

Pasinaudoję Kramerio formulėmis, randame x, y ir z:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4}{4}=1, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{0}{4}=0, \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{8}{4}=2.$$

Ats. (1, 0, 2).

Kartais antrosios ir trečiosios eilės determinantus patogiau skaičiuoti remiantis jų savybėmis. Suformuluosime ir pavyzdžiais paaiškinsime kai kurias determinantų savybes.

1. *Sukeitę determinanto eilutes su atitinkamo numerio stulpeliais, gausime determinantą, lygų pradiniam determinantui:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

ir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pavyzdžiai.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-6=-2.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+2+0-12-0-1=-6,$

ir

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+0+2-12-0-1=-6.$$

2. *Sukeitę dvi determinanto eilutes arba du stulpelius vietomis, gausime determinantą, kuris skiriasi nuo pradinio tik ženklu, t. y.*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

arba

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

arba

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pavyzdys.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3+4-12+2-1=-8.$$

Pirmąjį ir antrąjį stulpelius sukeičiame vietomis:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2+1+12-4-2+3=8.$$

Kaip matome, antrojo determinanto skaitinė reikšmė priešinga pirmojo determinanto reikšmei.

3. *Determinantas, kurio du stulpeliai arba dvi eilutės vienodos, lygus nuliui.*

Pavyzdžiai.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8-8=0.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+3+6-6-2-3=0,$

arba

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4+2+3-2-4-3=0.$$

4. *Jeigu determinanto kurio nors stulpelio arba eilutės visi elementai turi bendrąjį daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.*

Pavyzdys. Imkime determinantą

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Iš pirmojo stulpelio prieš determinanto ženklą iškeliame 3, o iš antrojo stulpelio — 4:

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12(18+5+2-2-6-15) = 12\cdot2=24.$$

5. *Jeigu determinanto kurios nors eilutės arba stulpelio visi elementai lygūs nuliui, tai toks determinantas lygus nuliui.*

Pavyzdys.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-0-0=0.$$

6. *Determinantas nepasikeis, jeigu prie jo eilutės arba stulpelio pridėsime arba atimsime kitos eilutės arba stulpelio elementus, padaugintus iš pastovaus daugiklio.*

Pavyzdys.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16-9+1-6+4-6=0.$$

Padauginę pirmąją eilutę iš 2 ir ją sudėję su antrąja, gauname:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0-15+5-0+20-10=0.$$

7. *Trečiosios eilės determinantą galima apskaičiuoti naudojantis antrosios eilės determinantais:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Pavyzdys.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=6+4-2(4+3)+8-9=10-14-1=-5.$$

Tą patį determinantą apskaičiuojame jau žinomu būdu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6-6+8-9+4-8=-5.$$

Kaip matome, rezultatai vienodi.

3.4.6. Homogeninių tiesinių lygčių sistemų sprendimas.

Lygčių sistema

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

vadinama homogenine.

Šios sistemos atitinkami determinantai yra

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Taigi, jeigu $\Delta \neq 0$, sistema turi vienintelį sprendinį $x=y=z=0$, vadinamą nuliniu. Jeigu homogeninės sistemos determinantas Δ lygus nuliui, tai ši sistema turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdžiai. Išspręsime homogenines tiesinių lygčių sistemas.

$$\textbf{1.} \begin{cases} 2x+3y-4z=0, \\ x+ y-2z=0, \\ 3x- y+ z=0. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=3-18+4+12-3-4=-6\neq 0.$$

Sistema turi vienintelį sprendinį $x=y=z=0$.

2. $\begin{cases}2x+3y+4z=0,\\ x-2y+5z=0,\\ 5x+8y+3z=0.\end{cases}$

Ši sistema turi be galo daug sprendinių, nes

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 5\\ 5 & 8 & 3\end{vmatrix}=-12+32+45+24-9-80=0.$$

3.5. Tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sprendimas

Su skaitinėmis nelygybėmis ir jų savybėmis jau susipažinome. Nelygybės gali būti ir su kintamaisiais, pavyzdžiui,

$$4x-5<x+4. \quad (1)$$

Šioje nelygybėje paėmę $x=2$, gauname teisingą skaitinę nelygybę

$$4\cdot 2-5<2+4, \quad 3<6.$$

Tokiu atveju sakome, kad skaičius 2 yra (1) nelygybės sprendinys. Yra ir daugiau tokių skaičių, kuriuos įrašę į duotąją nelygybę vietoje x gauname teisingą skaitinę nelygybę. Tie skaičiai sudaro (1) nelygybę tenkinančių sprendinių aibę. Yra skaičių, kurie netenkina (1) nelygybės, pavyzdžiui, 4. 4 įrašę į nelygybę, gauname neteisingą skaitinę nelygybę:

$$4\cdot 4-5<4+4,$$
$$16-5<8,$$
$$11<8.$$

Sakome, kad skaičius 4 nėra (1) nelygybės sprendinys.

Nelygybės $ax+b>a_1x+b_1$ arba $ax+b\geqslant a_1x+b_1$ vadinamos *tiesinėmis.*

Apibrėžimas. *Išspręsti nelygybę — reiškia rasti visas kintamojo reikšmes, su kuriomis gaunamos teisingos skaitinės nelygybės.*

Sprendžiant nelygybes, jos keičiamos paprastesnėmis ekvivalenčiomis nelygybėmis.

Dvi arba kelios nelygybės yra ekvivalenčios, jeigu jos turi tuos pačius sprendinius.

Pavyzdžiui, nelygybės $3x-1>0$ ir $6x>2$ yra ekvivalenčios, t. y.

$$3x-1>0 \Leftrightarrow 6x>2,$$

nes, kai $x>\frac{1}{3}$, abi jos yra teisingos skaitinės nelygybės.

Nelygybės $x^2>1$ ir $x>1$ nėra ekvivalenčios, nes, kai $x=-2$, pirmoji nelygybė yra teisinga skaitinė nelygybė $4>1$, o antroji — neteisinga skaitinė nelygybė $-2>1$.

Nelygybę su vienu kintamuoju žymėsime

$$f(x)>g(x);$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ — reiškiniai su kintamaisiais.

Nelygybės $f(x)>g(x)$ apibrėžimo sritis yra reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričių bendroji dalis.

Suformuluosime keletą nelygybių ekvivalentumo savybių, kuriomis remiantis sprendžiamos nelygybės.

1. *Jeigu prie abiejų nelygybės $f(x)>g(x)$ pusių pridėsime tą patį reiškinį $\varphi(x)$, apibrėžtą nelygybės apibrėžimo srityje, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią pradinei:*

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x).$$

Pavyzdys. Imkime nelygybę $4x-5>x+4$.

Prie abiejų jos pusių pridėję po $-x+5$, turime

$$4x-5-x+5>x+4-x+5.$$

Sutraukę panašiuosius narius, gauname

$$3x>9.$$

Šią nelygybę galime gauti iš pradinės nelygybės, perkėlę narius su kintamaisiais į vieną pusę, o narius be kintamųjų — į kitą su priešingais ženklais:

$$4x-5>x+4,$$
$$4x-x>4+5,$$
$$3x>9.$$

2. *Nelygybės narius galime kelti iš vienos pusės į kitą tik su priešingu ženklu.*

3. *Jeigu su visomis galimomis x reikšmėmis reiškinys $\varphi(x)$ yra teigiamas, tai*

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x)$$

arba

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)}>\frac{g(x)}{\varphi(x)}.$$

Pavyzdžiui, nelygybę $3x>9$ padauginę iš $\frac{1}{3}$ (padaliję iš 3), gauname:

$$\frac{1}{3}\cdot 3x>9\cdot\frac{1}{3}, \text{ arba } x>3.$$

4. *Jeigu su visomis galimomis x reikšmėmis reiškinys $\varphi(x)$ yra neigiamas, tai*

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x)$$

arba

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{g(x)}{\varphi(x)}.$$

Pavyzdžiui, nelygybės $-4x > 12$ abi puses padaliję iš -4 ir pakeitę nelygybės ženklą priešingu, gauname $x < -3$.

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime nelygybę

$$\frac{3x-2}{2} - \frac{2x-1}{3} > 1.$$

Padauginę abi jos puses iš 6, gauname:

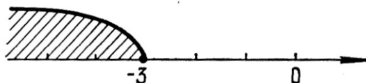
$$\frac{3x-2}{2} \cdot 6 - \frac{2x-1}{3} \cdot 6 > 6,$$

$$(3x-2) \cdot 3 - (2x-1) \cdot 2 > 6,$$
$$9x - 6 - 4x + 2 > 6,$$
$$5x > 10,$$
$$x > 2.$$

Sprendiniai pavaizduoti grafiškai 32 paveiksle.



32 pav.



33 pav.

Ats. $x \in (2, +\infty)$; čia skaičius 2 neįeina į sprendinių intervalą.

2. Spręsime nelygybę

$$2x - 5 \geqslant 4x + 1.$$
$$2x - 4x \geqslant 5 + 1,$$
$$-2x \geqslant 6,$$
$$x \geqslant -3.$$

Sprendiniai pavaizduoti grafiškai 33 paveiksle.

Ats. $x \in (-\infty, -3]$; čia skaičius -3 priklauso sprendinių intervalui.

3.6. Tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sistemų sprendimas

Jeigu reikia rasti tas x reikšmes, su kuriomis teisinga ir nelygybė $ax + b > 0$, ir nelygybė $cx + d > 0$, tai sakome, kad reikia išspręsti pirmojo laipsnio nelygybių sistemą, ir rašome

$$\begin{cases} ax + b > 0, \\ cx + d > 0. \end{cases}$$

Dviejų tiesinių nelygybių sistema simboliškai gali būti užrašoma šitaip:

$$\begin{cases} ax+b \gtreqless px+q, \\ a_1x+b_1 \gtreqless p_1x+q_1. \end{cases}$$

Spręsdami tokią sistemą, randame kiekvienos nelygybės sprendinius atskirai ir nustatome jų bendrąją dalį.

1. Jeigu išsprendę sistemos nelygybes gauname vienaprasmes jų sprendinių nelygybes (vienodų ženklų)

$$\begin{cases} x>\alpha, \\ x>\beta \quad (\alpha<\beta), \end{cases}$$

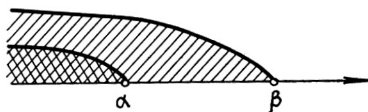
tai sistemos sprendiniai yra $x>\beta$.

Sistemos atskirų nelygybių sprendinius vaizduojame skaičių ašyje ir nustatome jų bendrąją dalį ($x>\beta$) (žr. 34 pav.). Šiuo atveju

$$x \in (\beta, +\infty).$$



34 pav.



35 pav.

Jeigu

$$\begin{cases} x<\alpha, \\ x<\beta \quad (\alpha<\beta), \end{cases}$$

tai sistemos sprendiniai bus abiejų nelygybių sprendinių bendroji dalis (žr. 35 pav.)

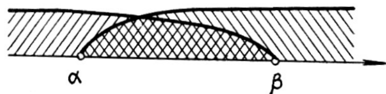
$$x<\alpha, \text{ arba } x \in (-\infty, \alpha).$$

2. Kai nelygybių sprendinių nelygybės yra

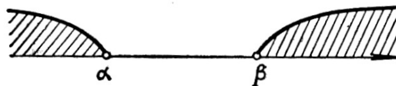
$$\begin{cases} x>\alpha, \\ x<\beta \quad (\alpha<\beta) \text{ (įvairiaprasmės)}, \end{cases}$$

tai sistemos sprendiniai — abiejų nelygybių sprendinių bendroji dalis (žr. 36 pav.) yra intervalas

$$\alpha<x<\beta, \text{ arba } x \in (\alpha, \beta).$$



36 pav.



37 pav.

3. Kai atskirų nelygybių sprendiniai yra

$$\begin{cases} x<\alpha, \\ x>\beta \quad (\alpha<\beta), \end{cases}$$

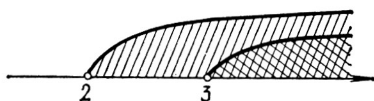
tai pavaizdavę juos skaičių ašyje pastebime, kad bendrosios dalies nėra (37 pav.). Taigi nelygybių sistema sprendinių neturi.

Pavyzdžiai. Išspręsime nelygybių sistemas.

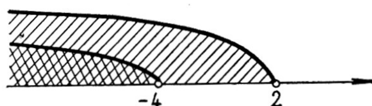
1. $\begin{cases} 3x-5>1, \\ 4x-7>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>6, \\ 4x>12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x>3. \end{cases}$

Gavome vienaprasmes sprendinių nelygybes (38 pav.). Sistemos sprendiniai — visos $x>3$ reikšmės.

Ats. $x \in (3, +\infty)$.



38 pav.



39 pav.

2. $\begin{cases} 5x-7<x+1, \\ 2x+3<-x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x<8, \\ 3x<-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ x<-4. \end{cases}$

Sistemos sprendiniai pavaizduoti 39 paveiksle.

Ats. $x \in (-\infty, -4)$.

3. $\begin{cases} 5x-7>2x+8, \\ 4x+2<3x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>15, \\ x<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5, \\ x<8. \end{cases}$

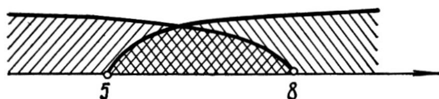
Sprendinių aibė atvaizduota 40 paveiksle.

Ats. $x \in (5, 8)$.

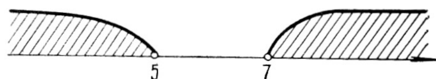
4. $\begin{cases} 3x-12>2x-5, \\ 4x+8<3x+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7, \\ x<5. \end{cases}$

Sprendiniai pavaizduoti grafiškai 41 paveiksle.

Ats. Sprendinių nėra.



40 pav.

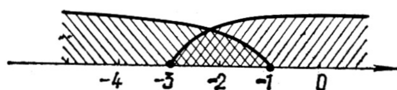


41 pav.

5. Išspręskime 4 nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} 3x-5>5x-7, \\ 2x+3\leqslant x+2, \\ 5x-3\geqslant 2x-12, \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x>-2, \\ x\leqslant -1, \\ 3x\geqslant -9, \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x\leqslant -1, \\ x\geqslant -3, \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1, \\ x\geqslant -3. \end{cases}$$

Sprendiniai grafiškai pavaizduoti 42 paveiksle. Sistemą tenkina intervalų $x \leqslant -1$ ir $x \geqslant -3$ bendroji dalis, įskaitant ir kraštinius skaičius -3 ir -1.



42 pav.

Ats. $x \in [-3, -1]$.

3.7. Nelygybių su moduliu sprendimas

Išspręskime nelygybes

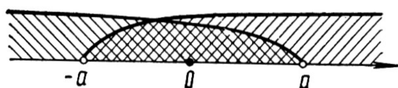
$$|x|<a \text{ ir } |x|>a \quad (a>0).$$

Remdamiesi skaičiaus modulio apibrėžimu, pirmąją nelygybę galime pakeisti dviejų sistemų visuma:

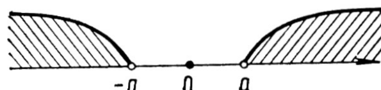
$$|x|<a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<a, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x<a, \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ -a<x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -a<x<a.$$

Sprendinių aibės grafiškai pavaizduotos 43 paveiksle. Taigi nelygybę $|x|<a$ tenkina visi

$$x \in (-a, a).$$



43 pav.



44 pav.

Panašiai spręsdami nelygybę $|x|>a$, gautume

$$|x|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>a, \\ x<-a. \end{array}\right.$$

Sprendiniai grafiškai pavaizduoti 44 paveiksle. Nelygybės $|x|>a$ sprendiniai — visi $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime nelygybę

$$|2x-3|<5.$$

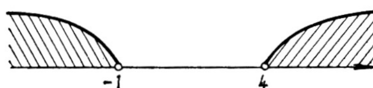
Remdamiesi modulio apibrėžimu, užrašome:

$$-5<2x-3<5,$$
$$-2<2x<8,$$
$$-1<x<4.$$

Sprendinių intervalas pavaizduotas 45 paveiksle.



45 pav.



46 pav.

Ats. $x \in (-1, 4)$.

2. Rasime nelygybės

$$|2x-3|>5$$

sprendinius.

Ši nelygybė ekvivalenti nelygybių visumai

$$\left[\begin{array}{l} 2x-3>5, \\ 2x-3<-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x>8, \\ 2x<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<-1. \end{array}\right.$$

Gautieji sprendiniai pavaizduoti 46 paveiksle.

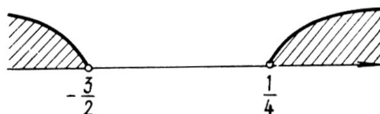
Ats. $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

3. Spręsime nelygybę

$$|3x+1|>2-x.$$

Remdamiesi modulio apibrėžimu, gauname:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3x+1 \geqslant 0, \\ 3x+1>2-x \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3x+1<0, \\ -(3x+1)>2-x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3x \geqslant -1, \\ 4x>1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3x<-1, \\ -2x>3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\frac{1}{3}, \\ x>\frac{1}{4} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<-\frac{1}{3}, \\ x<-\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{4}, \\ x<-\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$



47 pav.

Ats. $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ (žr. 47 pav.).

4. Rasime nelygybės

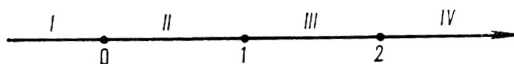
$$|x-1|+|2-x|>5+|x|$$

sprendinius. Šios nelygybės sprendimas remiantis modulio apibrėžimu būtų gana sudėtingas. Išspręskime ją intervalų metodu.

Randame kintamojo x reikšmes, su kuriomis reiškiniai po modulio ženklu lygūs nuliui: $x=0$, $x=1$, $x=2$. Šios kintamojo reikšmės

skaičių ašį dalija į keturis intervalus (48 pav.), kuriuos užrašome šitaip:

$$x\leqslant 0,\ 0<x\leqslant 1,\ 1<x\leqslant 2,\ x>2.$$



48 pav.

Kiekvienam intervalui užrašome sprendžiamąją nelygybę ir gauname sistemų visumą:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant 0,\\ -x+1+2-x>5-x,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\leqslant 1,\\ -x+1+2-x>5+x,\end{cases}\\ \begin{cases}1<x\leqslant 2,\\ x-1+2-x>5+x,\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x-1-2+x>5+x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant 0,\\ x<-2,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\leqslant 1,\\ x<-2/3,\end{cases}\\ \begin{cases}1<x\leqslant 2,\\ x<-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x>8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2,\\ \varnothing,\\ \varnothing,\\ x>8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2,\\ x>8.\end{array}\right.$$

Ats. $x\in(-\infty,\ -2)\cup(8,\ +\infty)$.

5. Išspręskime nelygybę

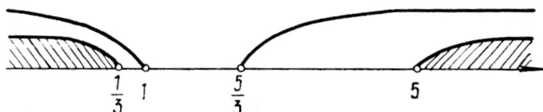
$$|x-|2x-3||>2.$$

Iš pradžių šią nelygybę sprendžiame panašiai kaip nelygybę $|x|>a$, po to remiamės modulio apibrėžimu:

$$|x-|2x-3||>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-|2x-3|>2,\\ x-|2x-3|<-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x-3|<x-2,\\ |2x-3|>x+2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3<x-2,\\ 2x-3>2-x,\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}2x-3>x+2,\\ 2x-3<-x-2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\ x>5/3,\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}x>5,\\ x<1/3.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Rezultatai grafiškai pavaizduoti 49 paveiksle.



49 pav.

Ats. $x\in(-\infty,\ 1/3)\cup(5,\ +\infty)$.

3.8. Tiesinių nelygybių sistemos su dviem kintamaisiais, jų sprendinių grafinis vaizdavimas

Nelygybės

$$ax+by+c\leqslant 0 \text{ arba } ax+by+c\geqslant 0,\ a,\ b,\ c\in R,$$

vadinamos tiesinėmis nelygybėmis su dviem kintamaisiais. Tokios nelygybės sprendiniu laikoma kintamųjų x ir y reikšmių pora, su kuria duotoji nelygybė yra teisinga skaitinė nelygybė.

Imkime nelygybę

$$2x+y-1>0.$$

Iš čia

$$y>-2x+1.$$

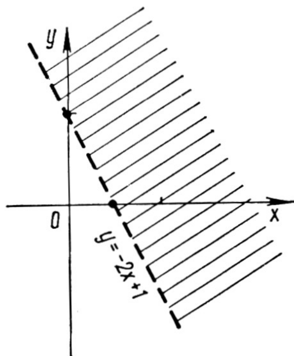
Norėdami rasti šios nelygybės sprendinį, pasirenkame x reikšmę, pavyzdžiui, $x=2$, ir apskaičiuojame atitinkamą reiškinio $-2x+1$ reikšmę:

$$-2\cdot 2+1=-4+1=-3.$$

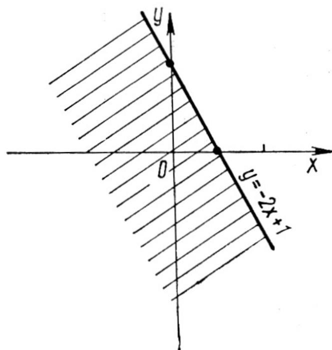
Taigi kiekviena pora $(x,\ y)$, kurios x reikšmė lygi 2, o y reikšmė didesnė už -3, yra nagrinėjamos nelygybės sprendinys. Pavyzdžiui, $(2,\ -2)$, $(2,\ -1)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 4)$ ir t. t. yra nelygybės $y>-2x+1$ sprendiniai.

Tokių sprendinių aibė yra begalinė. Nelygybės su dviem kintamaisiais grafinis vaizdas yra aibė plokštumos taškų, kurių koordinatės — tos nelygybės sprendiniai.

Pavaizduokime grafiškai nelygybės $y>-2x+1$ sprendinius. Tuo tikslu brėžiame tiesę $y=-2x+1$, kuri brėžimo plokštumą dalija į dvi pusplokštumes. Virš tiesės esančios pusplokštumės kiekvieno taško koordinatės, išskyrus tiesės $y=-2x+1$ taškus, tenkina nelygybę $y>-2x+1$ (žr. 50 pav.).



50 pav.



51 pav.

Nelygybės $y\leqslant -2x+1$ sprendiniai priklauso pusplokštumei, esančiai žemiau tiesės $y=-2x+1$, įskaitant ir pačios tiesės taškus (žr. 51 pav.).

52 paveiksle grafiškai pavaizduoti kai kurių paprasčiausių nelygybių sprendiniai.

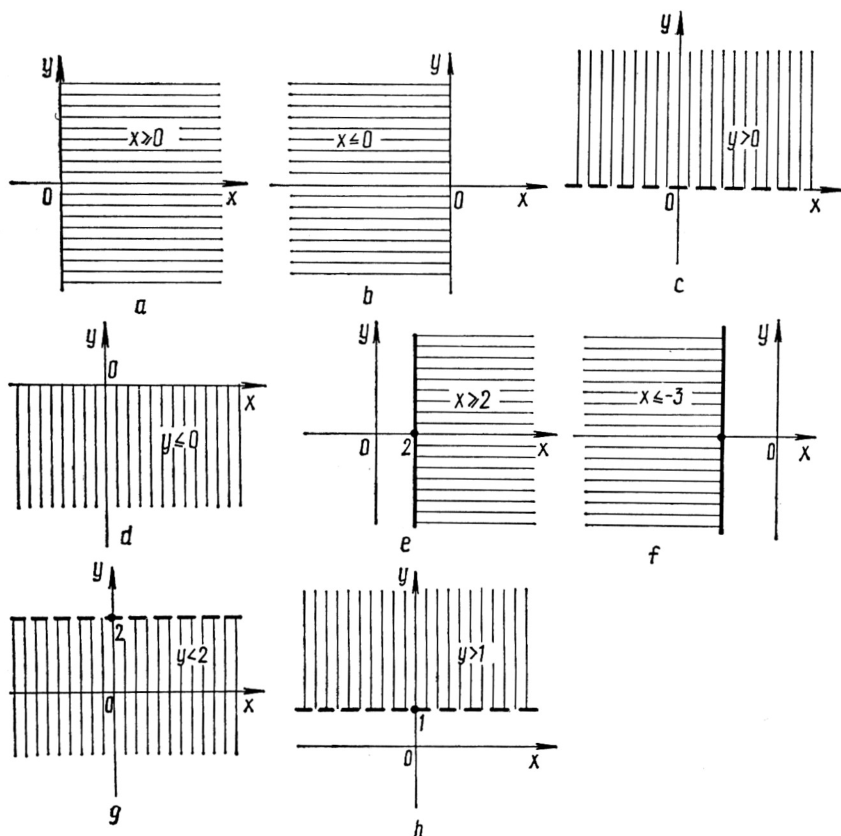
Apibrėžimas. *Dvi arba kelios nelygybės su dviem kintamaisiais x ir y sudaro sistemą, jeigu reikia rasti tokias kintamųjų reikšmes, su kuriomis tos nelygybės tampa teisingomis skaitinėmis nelygybėmis.*

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime nelygybių sistemą

$$\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 5, \\ -3\leqslant y\leqslant 4. \end{cases}$$

Pirmosios nelygybės sprendiniai yra visi plokštumos taškai, esantys tarp dviejų tiesių $x=-2$ ir $x=5$, įskaitant ir tų tiesių taškus (plokštumos juosta).

Antrosios nelygybės sprendiniai yra visi plokštumos taškai, esantys tarp tiesių $y=-3$ ir $y=4$, įskaitant ir tų tiesių taškus (plokštumos juosta).



52 pav.

Nelygybių sistemos sprendiniai yra minėtų juostų bendroji dalis (53 pav.).

2. Spręsime nelygybių sistemą

$$\begin{cases} y \leqslant x+3, \\ y \geqslant x-2. \end{cases}$$

Tiesės $y=x+3$ ir $y=x-2$ yra lygiagrečios. Nelygybės $y \leqslant x+3$ sprendinių aibė yra pusplokštumė žemiau tiesės $y=x+3$, o nelygybės $y \geqslant x-2$ sprendinių aibė yra pusplokštumė virš tiesės $y=x-2$. Jų bendroji dalis yra plokštumos juosta tarp minėtų lygiagrečių tiesių (54 pav.). Kiekvienas tos juostos taškas (įskaitant ir juostos kraštus) yra nelygybių sistemos sprendinys.

3. Rasime nelygybių sistemos

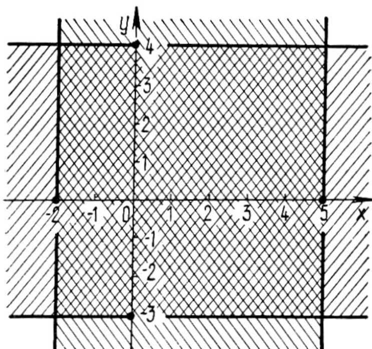
$$\begin{cases} 2x+y \leqslant 4, \\ x-y \geqslant -2, \\ y \geqslant -5 \end{cases}$$

sprendinius.

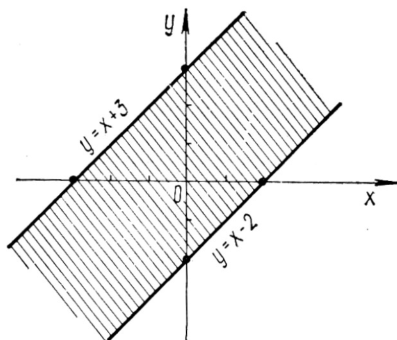
Ši sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} y \leqslant -2x+4, \\ y \leqslant x+2, \\ y \geqslant -5. \end{cases}$$

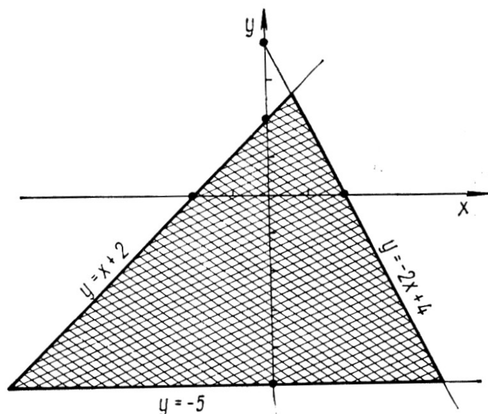
Pastarosios sistemos sprendinių aibė yra trijų pusplokštumių bendroji dalis (55 pav.).



53 pav.



54 pav.



55 pav.

3.9. Paprasčiausieji tiesinio programavimo uždaviniai

Įvairiuose ekonomikos ir planavimo uždaviniuose tenka spręsti lygtis, nelygybes ir nelygybių sistemas. Labiausiai paplitęs uždavinys — nustatyti optimalų (geriausią) resursų panaudojimo planą (sudaryti geriausią gamybos planą). Duomenys apie resursus paprastai užrašomi lygtimis ir nelygybėmis. Planas — kokia nors funkcija, kurios didžiausią arba mažiausią reikšmę reikia rasti atsižvelgiant į duomenis apie resursus. Tą funkciją vadinsime *tikslo funkcija.* Ji gali reikšti pervežimo išlaidas, įmonės pelną, optimalų gamybos priemonių išdėstymą ir kt.

Taigi spręsime vadinamuosius *tiesinio programavimo uždavinius,* t. y. uždavinius su tam tikrais apribojimais. Pavyzdžiui, raskime didžiausią x reikšmę, tenkinančią nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 5x \leqslant 75, \\ 6x \leqslant 30, \\ x \leqslant 10. \end{cases}$$

Sprendžiame kiekvieną nelygybę atskirai:

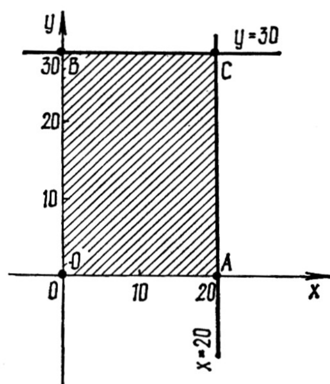
$$\begin{cases} 5x \leqslant 75, \\ 6x \leqslant 30, \\ x \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 15, \\ x \leqslant 5, \\ x \leqslant 10. \end{cases}$$

Visas tris nelygybes tenkina $x \leqslant 5$, o didžiausia iš tų reikšmių yra $x=5$. Tokio tipo uždaviniai vadinami *vienmačiais.*

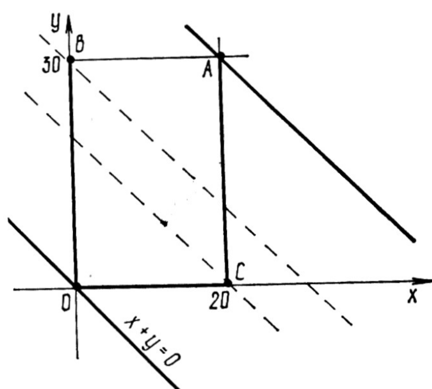
Dabar nagrinėsime dvimatį uždavinį. Nustatysime didžiausią x reikšmę esant šiems apribojimams:

$$x \leqslant 20, \quad y \leqslant 30, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Imame koordinačių sistemą ir joje nubrėžiame tieses $x=20$ ir $y=30$. Gauname keturkampį $OBCA$ (56 pav.). Didžiausia x reikšmė, tenkinanti sąlygą



56 pav.



57 pav.

$x \leqslant 20$, yra $x=20$. Atkarpoje AC yra be galo daug tokių taškų, kurių koordinatė $x=20$. Tarp jų ir taškai A ir C. Taigi visi atkarpos AC taškai yra optimalūs mūsų uždavinio sprendiniai. Panašiai nustatome ir didžiausią y reikšmę. Atsižvelgę į sąlygą $y \leqslant 30$, matome, kad kiekvienas atkarpos BC taškas yra optimalus sprendinys. Taškai B ir C taip pat priklauso sprendinių visumai.

Kiekvienas keturkampio $OBCA$ taškas, įskaitant ir jo kontūrą, tenkina sąlygas $x \leqslant 20$, $y \leqslant 30$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Keturkampio viršūnių koordinatės yra kintamųjų x ir y didžiausios arba mažiausios reikšmės, t. y. optimalūs sprendiniai. Taškų O ir B koordinatės x reikšmės yra mažiausios, o taškų O ir A — y reikšmės mažiausios. Šie taškai grafiškai vaizduoja optimalius sprendinius, kai reikia rasti minimalią tikslo funkcijos reikšmę.

Dabar ieškosime tokių x ir y reikšmių, kad suma $x+y$ būtų mažiausia, t. y. minimizuosime $x+y$ esant tiems patiems apribojimams. Ši tikslo funkcija įgyja mažiausią reikšmę, kai $x+y=0$, t. y. taške $O(0, 0)$. Jos grafikas — tiesė eina per koordinačių pradžią (57 pav.). Ieškant sumos $x+y$ didžiausios reikšmės, t. y. ją maksimizuojant, pakanka tikslo funkcijos $x+y=0$ grafiką taip stumti lygiagrečiai, kad jis praeitų per visas keturkampio $OBAC$ viršūnes. Viršūnėje A suma $x+y$ bus didžiausia, t. y. $x+y=50$. Iš šio pavyzdžio išplaukia, kad optimalūs sprendiniai yra keturkampio viršūnių koordinatės.

Maksimizuokime funkciją

$$3x-2y,$$

žinodami, kad $x\leqslant 20$, $y\leqslant 30$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

Sudarome lentelę:

Viršūnė	Funkcijos $3x-2y$ reikšmė	Maksimumas
(0, 0)	$3x-2y=3\cdot 0-2\cdot 0=0$	
(20, 0)	$3x-2y=3\cdot 20-2\cdot 0=60$	60
(0, 30)	$3x-2y=3\cdot 0-2\cdot 30=-60$	
(20, 30)	$3x-2y=3\cdot 20-2\cdot 30=0$	

Matome, kad tikslo funkcijos $3x-2y$ optimali reikšmė yra 60, o vienintelis optimalus sprendinys — taškas (20, 0).

Sakykime, iš dviejų gamybos punktų (gamyklų) A ir B produkcija vežama į tris vartojimo punktus M, N, P. Punkte A gaminama 250 vienetų produkcijos, o punkte B — 350 vienetų. Punktui M reikia 150 vienetų, punktui N — 240 vienetų, o punktui P — 210 vienetų produkcijos. Produkcijos vieneto pervežimo kaina iš gamybos punkto į vartojimo punktą pateikta lentelėje:

	M	N	P
A	4	3	5
B	5	6	4

Reikia sudaryti produkcijos pervežimo minimalų planą.

Sakykime, iš punkto A į punktą M vežame x vienetų produkcijos, o iš A į N — y vienetų. Kadangi punktas M reikalauja 150 vienetų, tai iš punkto B reikia dar atvežti $150-x$ vienetų. Taip pat iš B į N reikia atvežti $240-y$ vienetų.

Kadangi punkte A pagaminta 250 vienetų, o iš jo jau paimta $x+y$ vienetų, tai iš A į P vežama $250-x-y$ vienetų. Kad būtų galima visiškai aprūpinti punktą P, reikia iš punkto B atvežti $210-(250-x-y)=x+y-4$ produkcijos vienetų.

Sudarome pervežimų planą:

	M	N	P
A	x	y	$250-x-y$
B	$150-x$	$240-y$	$x+y-40$

Sudauginę abiejų lentelių atitinkamus elementus ir juos sudėję, gauname visą pervežimų kainą, kurią žymėsime $S(x, y)$:

$$S(x, y)=4x+3y+5(250-x-y)+5(150-x)+6(240-y)+4(x+y-40)=$$
$$=-2x-4y+3280;$$
$$S(x, y)=-2x-4y+3280.$$

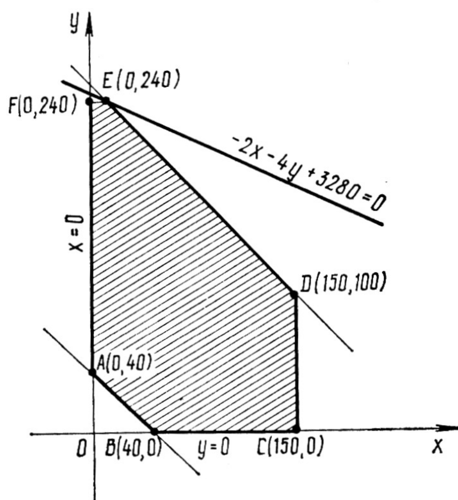
Taigi reikia rasti funkcijos $S(x, y)$ minimumą, kai visi skaičiai antrojoje lentelėje yra teigiami, t. y. $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $250-x-y\geqslant 0$, $150-x\geqslant 0$, $240-y\geqslant 0$, $x+y-40\geqslant 0$.

Kitaip sakant, reikia rasti funkcijos $S(x, y)$ minimumą srityje

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ 250-x-y\geqslant 0, \\ 150-x\geqslant 0, \\ 240-y\geqslant 0, \\ x+y-40\geqslant 0. \end{cases}$$

Ši sritis (daugiakampis) atvaizduota 58 paveiksle. Tame paveiksle pavaizduota ir visa pervežimų kaina (tikslo funkcija):

$$S(x, y)=-2x-4y+3280.$$



58 pav.

Funkcija $S(x, y)$ yra minimali vienoje iš daugiakampio $ABCDEF$ viršūnių. Skaičiuojame funkcijos $S(x, y)$ reikšmes visose viršūnėse:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
3120	3200	2980	2580	2300	2320

Mažiausia funkcijos $S(x, y)$ reikšmė yra 2300. Šią reikšmę funkcija įgyja taške $E(10, 240)$. Taigi $x=10$, $y=240$. Įrašę šias reikšmes į antrąją lentelę (pervežimo planą), gauname:

	M	*N*	*P*
A	10	240	0
B	140	0	210

Vadinasi, iš punkto A į punktą M reikia nuvežti 10 vienetų produkcijos, iš punkto A į N — 240 vienetų ir t. t.

Ekonomiškiausios planinės pervežimo išlaidos yra 2300 rb.

3.10. Kvadratinė lygtis ir jos sprendimas

Lygtis

$$ax^2+bx+c=0$$

vadinama *kvadratine*. Čia x yra kintamasis, o a, b, $c \in R$, tik $a \neq 0$. Koeficientai a, b ir c vadinami atitinkamai pirmojo, antrojo ir trečiojo nario koeficientais. Pavyzdžiui, lygtyje $2x^2-5x+3=0$ $a=2$, $b=-5$, $a=3$.

Kvadratinė lygtis, kurios koeficientas a lygus 1, vadinama *redukuotąja* kvadratine lygtimi. Bendruoju atveju ji užrašoma šitaip:

$$x^2+px+q=0.$$

Jeigu kvadratinės lygties koeficientas a neigiamas, tai lygties abi puses padauginę iš -1, gauname jai ekvivalenčią lygtį, kurios pirmasis koeficientas a teigiamas.

Pavyzdžiui, lygtis $-2x^2+5x-2=0$ ekvivalenti lygčiai $2x^2-5x+$ $+2=0$.

3.10.1. Nepilnosios kvadratinės lygtys ir jų sprendimas. Kvadratinė lygtis $ax^2+bx+c=0$, kurios $b=0$ arba $c=0$, vadinama *nepilnąja* kvadratine lygtimi.

1. Kai $c=0$, $b \neq 0$, turime kvadratinę lygtį

$$ax^2+bx=0.$$

Iškėlę kintamąjį x už skliaustų, gauname

$$x(ax+b)=0.$$

Kai dviejų dauginamųjų sandauga lygi nuliui, bent vienas iš jų turi būti lygus nuliui:

a) $x_1=0$; b) $ax+b=0$, $ax=-b$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

Pavyzdys. Išspręsime nepilnąją kvadratinę lygtį $2x^2-8x=0$:

$$2x^2-8x=0, \quad 2x(x-4)=0,$$

$$x_1=0; \ x-4=0, \ x_2=4.$$

2. Kai $b=0$, $c \neq 0$, turime lygtį

$$ax^2+c=0.$$

Iš čia $ax^2=-c$, $x^2=-\frac{c}{a}$. Jeigu a ir c yra priešingų ženklų, tai $-\frac{c}{a}>0$. Tada, remdamiesi kvadratinės šaknies apibrėžimu, gauname

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Jeigu a ir c yra vienodų ženklų, tai $-\frac{c}{a}<0$. Tuomet duotoji lygtis realiųjų šaknų neturi.

Pavyzdys. Išspręsime lygtį $3x^2-192=0$:

$$3x^2-192=0,\ x^2-64=0,\ x^2=64,$$

$$x_1=-8,\ x_2=8.$$

3. Kai $b=0$ ir $c=0$, turime lygtį

$$ax^2=0.$$

Ši lygtis turi dvi šaknis:

$$x_1=0,\ x_2=0 \text{ (kartotinė šaknis)}.$$

3.10.2. Redukuotosios kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ sprendimas. Padauginę ir padaliję narį px iš 2 ir laisvąjį narį q perkėlę į kitą lygties pusę, gauname

$$x^2+2\frac{p}{2}\cdot x=-q.$$

Prie abiejų lygties pusių pridedame po $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$$x^2+2\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Kairėje lygties pusėje pritaikę dvinario kvadrato formulę, gauname

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Remiamės šaknies apibrėžimu (kai $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geqslant0$) ir gauname

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

arba

$$\boxed{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.} \qquad (1)$$

Pavyzdys. Išspręsime kvadratinę lygtį $x^2-5x+6=0$:

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6},\quad x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}},\quad x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$

$$x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2,\quad x_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

3.10.3. Kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ sprendimas. Lygties $ax^2+bx+c=0$ abi puses padaliję iš koeficiento a, gauname redukuotąją kvadratinę lygtį

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Pasinaudoję (1) formule, randame:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}},$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.} \qquad (2)$$

Gavome bendrąją kvadratinės lygties šaknų formulę. Ja naudodamiesi galime rasti bet kurios kvadratinės lygties šaknis, kai $b^2-4ac\geqslant 0$.

Pavyzdys. Spręsime kvadratinę lygtį $3x^2-13x+4=0$. Taikome (2) formulę:

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{6}, \quad x=\frac{13\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{13\pm 11}{6},$$

$$x_1=\frac{13-11}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \quad x_2=\frac{13+11}{6}=\frac{24}{6}=4.$$

Sprendžiant kvadratinę lygtį, kurios koeficientas b yra lyginis sveikasis skaičius, patogu naudotis supaprastinta formule

$$\boxed{x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}.} \qquad (3)$$

Pavyzdys. Rasime lygties

$$5x^2-48x-20=0$$

šaknis. Naudosimės (3) formule:

$$x=\frac{24\pm\sqrt{24^2+100}}{5}=\frac{24\pm 26}{5};$$

$$x_1=-\frac{2}{5}, \quad x_2=10.$$

3.10.4. Kvadratinės lygties šaknų tyrimas naudojantis diskriminantu. Reiškinys b^2-4ac vadinamas kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ *diskriminantu* ir žymimas raide D. Taigi kvadratinės lygties šaknys yra

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

1) kai $D>0$, kvadratinė lygtis turi dvi skirtingas realias šaknis: Kaip matome, kvadratinės lygties šaknys priklauso nuo diskriminanto:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};$$

2) kai $D=0$, kvadratinė lygtis turi dvi lygias realias šaknis:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

3) kai $D<0$, kvadratinė lygtis neturi realių šaknų.

Pavyzdžiai. 1. Naudodamiesi diskriminantu, nustatysime, ar kvadratinė lygtis

$$x^2+x-6=0$$

turi šaknį. Apskaičiuojame D:

$$D=1+24=25>0.$$

Kadangi $D>0$, tai lygtis turi dvi skirtingas realias šaknis.

2. Apskaičiuojame lygties

$$4x^2-12x+9=0$$

diskriminantą D:

$$D=144-144=0.$$

$D=0$, taigi lygtis turi dvi lygias šaknis:

$$x_1=x_2=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$$

3. Randame lygties

$$x^2-4x+12=0$$

diskriminantą:

$$D=16-48=-34<0.$$

$D<0$, realių šaknų nėra.

4. Su kuriomis parametro m reikšmėmis lygtis

$$x^2-2(1+3m)x+7(3+2m)=0$$

turi dvi lygias šaknis?

Kadangi turime redukuotąją kvadratinę lygtį, tai diskriminantą skaičiuosime pagal formulę

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Duotosios lygties šaknys yra lygios, kai $D=0$, t. y.

$$(1+3m)^2-7(3+2m)=0,$$
$$9m^2-8m-20=0.$$

Iš čia

$$m=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{9},$$

$$m=\frac{4\pm14}{9},$$

$$m_1=-1\frac{1}{9}, \quad m_2=2.$$

Pažymėsime, kad, kai $D=0$, kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ kairioji pusė yra dvinario kvadratas. Pavyzdžiui, lygčių

$$x^2-4x+4=0,$$
$$4x^2-4x+1=0,$$
$$x^2+6x+9=0$$

šaknys yra lygios. Patikrinkite.

3.10.5. Kvadratinės lygties šaknų savybės (Vieto teorema). Kaip žinome, redukuotosios kvadratinės lygties

$$x^2+px+q=0$$

šaknys yra

$$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}, \qquad x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Jas sudėję ir sudauginę, gauname:

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=2\left(-\frac{p}{2}\right)=-p,$$

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=$$

$$=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Taigi

$$\boxed{x_1+x_2=-p, \quad x_1\cdot x_2=q.} \qquad (4)$$

Įrodėme vadinamąją Vieto teoremą: *redukuotosios kvadratinės lygties šaknų suma lygi antrajam koeficientui, paimtam su priešingu ženklu, o šaknų sandauga lygi laisvajam nariui.*

Kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknų savybės užrašomos šitaip:

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.} \qquad (5)$$

Teisinga ir Vieto teoremai atvirkštinė teorema: *jeigu dviejų skaičių suma lygi p, o jų sandauga lygi q, tai tie skaičiai yra lygties*

$$x^2-px+q=0$$

šaknys.

Sakykim, $m+n=p$, $mn=q$. Tuomet lygtis

$$x^2-px+q=0$$

tampa šitokia:

$$x^2-(m+n)x+mn=0.$$

Norėdami įsitikinti, kad m ir n yra tos lygties šaknys, vietoje x įrašykime $x_1=m$, $x_2=n$. Kai $x=m$,

$$m^2-(m+n)m+mn=m^2-m^2-mn+mn=0.$$

Vadinasi, m yra lygties $x^2-px+q=0$ šaknis. Panašiai įrodytume, kad ir n yra tos lygties šaknis.

Pavyzdys. Parašysime kvadratinę lygtį, kurios šaknys yra skaičiai $-\frac{3}{4}$ ir $\frac{1}{2}$.

Kadangi $x_1+x_2=-p$, o $x_1 \cdot x_2=q$, tai

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-p, \quad \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=q,$$

arba

$$p=\frac{1}{4}, \qquad q=-\frac{3}{8}.$$

Ieškomoji lygtis yra

$$x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}=0,$$

arba

$$8x^2-2x-3=0.$$

3.11. Kvadratinis trinaris, jo skaidymas dauginamaisiais. Kvadratinio trinario grafikas

3.11.1. Kvadratinis trinaris. Bendruoju atveju kvadratinis trinaris užrašomas šitaip:

$$ax^2+bx+c;$$

čia $a, b, c \in R$ ir $a \neq 0$. Šis trinaris yra kvadratinė argumento x funkcija. Pažymėję tą funkciją raide y, gauname

$$y=ax^2+bx+c.$$

Trinario šaknys yra tos argumento x reikšmės, su kuriomis jis lygus nuliui. Taigi, norint rasti trinario šaknis, reikia jį prilyginti nuliui ir išspręsti gautąją lygtį. Dažnai kvadratinį trinarį reikia skaidyti dauginamaisiais. Išskaidykime dauginamaisiais kvadratinį trinarį

$$x^2+px+q.$$

Sakykime, x_1 ir x_2 yra to trinario šaknys. Kaip žinome,

$$p=-(x_1+x_2), \qquad q=x_1 \cdot x_2.$$

Šias reikšmes įrašę į trinarį x^2+px+q, gauname:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=$$
$$=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Taigi

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2). \tag{6}$$

Pavyzdys. Išskaidykime dauginamaisiais trinarį x^2-x-2. Randame jo šaknis:

$$x^2-x-2=0,$$

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}, \qquad x=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2},$$

$$x_1=-1, \qquad x_2=2.$$

Vadinasi, $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

Dabar išskaidykime dauginamaisiais trinarį ax^2+bx+c. Iškėlę a už skliaustų, skliaustuose gauname redukuotąjį kvadratinį trinarį. Jį skaidome dauginamaisiais anksčiau nurodytu būdu:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{7}$$

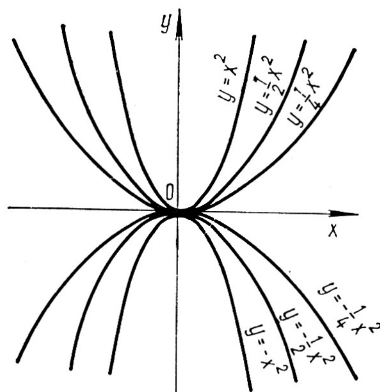
Pavyzdys. Išskaidykime trinarį $2x^2-5x+2$ dauginamaisiais. Rasime šio trinario šaknis:

$$2x^2-5x+2=0, \qquad x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4};$$

$$x_1=\frac{1}{2}, \qquad x_2=2.$$

Taigi $2x^2-5x+2=2(x-\frac{1}{2})(x-2)=(2x-1)(x-2)$.

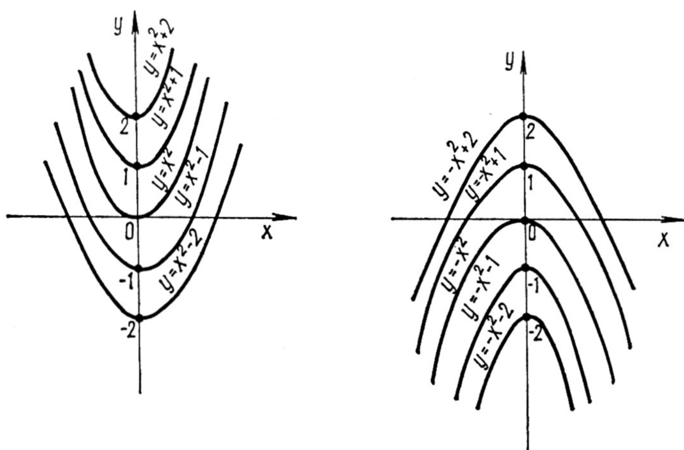
3.11.2. Kvadratinio trinario grafikas. Iš pradžių nubrėžkime funkcijos $y=ax^2$ (a — koeficientas, x — argumentas) grafiką. 59 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ ir $y=\frac{1}{4}x^2$ grafikai. Tie grafikai — parabolės. Kai $a>0$, parabolės eina per koordinačių pradžią



59 pav.

ir jų šakos nukreiptos į viršų. Kai $a<0$, parabolės taip pat eina per koordinačių pradžią, tačiau jų šakos nukreiptos žemyn.

Kelių $y=ax^2+c$ pavidalo funkcijų grafikai pavaizduoti 60 paveiksle. Tie grafikai yra parabolės, simetriškos ašies Oy atžvilgiu. Kai $a>0$, parabolių šakos eina į viršų, kai $a<0$, — žemyn (60 pav.).



60 pav.

Funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas — taip pat parabolė. Jos padėtis plokštumoje priklauso nuo diskriminanto ženklo.

1. $D>0$. Pavyzdžiui, nubraižykime funkcijos

$$y=x^2+x-2$$

grafiką.

Sudarome lentelę:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	0	-2	-2	0	4

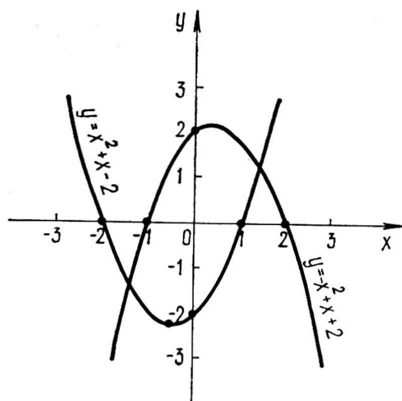
Lentelės duomenis perkeliame į koordinačių sistemą ir brėžiame grafiką. 61 paveiksle matyti, kad parabolė kerta ašį Ox dviejuose taškuose. Tų taškų abscisės $x_1=-2$, $x_2=1$ yra trinario x^2+x-2 šaknys. Be to, parabolės šakos kyla į viršų, nes $a>0$. Tame pačiame paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=-x^2+x+2$ grafikas. Kaip matome, tos funkcijos grafikas — parabolė taip pat kerta ašį Ox, tačiau parabolės šakos nukreiptos žemyn, nes $a<0$. Funkcijos $y=$ $=-x^2+x+2$ grafikas kerta ašį Ox taškuose $x_1=-1$, $x_2=2$.

2. $D=0$. Pavyzdžiui, nubraižykime funkcijos $y=x^2-4x+4$ grafiką.

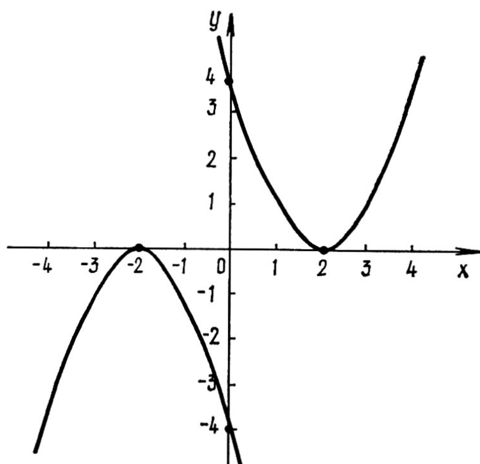
Sudarome lentelę:

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

Brėžiame funkcijos $y=x^2-4x+4$ grafiką. 62 paveiksle matyti, kad funkcijos $y=x^2-4x+4$ $(a>0)$ grafikas yra parabolė, liečianti



61 pav.



62 pav.

ašį Ox taške $x=2$. Ši kintamojo x reikšmė yra trinario x^2-4x+4 šaknis. Tame pačiame paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=-x^2+4x-4$ grafikas — parabolė, kuri liečia ašį Ox taške $x=-2$ ir kurios šakos nukreiptos žemyn $(a<0)$.

3. $D<0$. Šiuo atveju, kvadratinis trinaris ax^2+bx+c realių šaknų neturi, todėl jo grafikas nekirs ašies Ox. Parabolės šakų kryptys priklauso nuo koeficiento a: kai $a>0$, parabolės šakos nukreiptos į viršų, kai $a<0$, — žemyn.

Pavyzdys. Nubraižysime funkcijos $y=x^2-x+1$ grafiką.

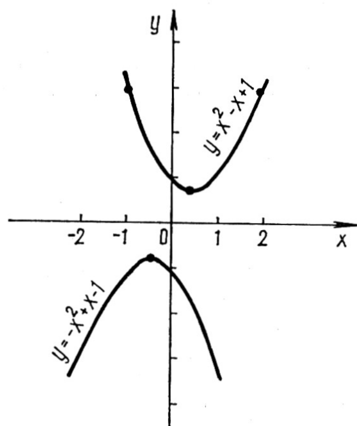
Sudarome lentelę:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	3	1	$\frac{3}{4}$	1	3

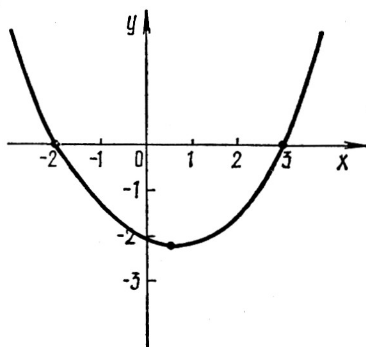
Naudodamiesi lentelės duomenimis, braižome funkcijos grafiką — parabolę (žr. 63 pav.). Tame pačiame paveiksle pavaizduotas ir funkcijos $y=-x^2+x-1$ grafikas. Tai parabolė, kurios šakos nu-

kreiptos žemyn, nes $a<0$. Abiejų funkcijų grafikai nekerta ašies Ox.

Brėždami funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiką pastebėjome, kad, kai $D\geqslant 0$, tas grafikas — parabolė kerta ašį Ox taškuose, kurių abscisės yra lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys x_1 ir x_2.



63 pav.



64 pav.

Išvada. *Norint išspręsti kvadratinę lygtį grafiškai, reikia nubrėžti funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiką. To grafiko susikirtimo su ašimi Ox taškų abscisės ir yra lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys.*

3.12. Kvadratinės nelygybės ir jų sprendimas

Nelygybės

$$ax^2+bx+c\geqslant 0 \quad \text{ir} \quad ax^2+bx+c\leqslant 0$$

vadinamos kvadratinėmis. Spręsdami tas nelygybes, naudosimės trinario ax^2+bx+c grafiku.

Pavyzdžiai. Išspręsime kvadratines nelygybes.

1. $x^2-x-6>0$.

Randame trinario šaknis:

$$x^2-x-6=0, \qquad x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$x_1=-2, \qquad x_2=3.$$

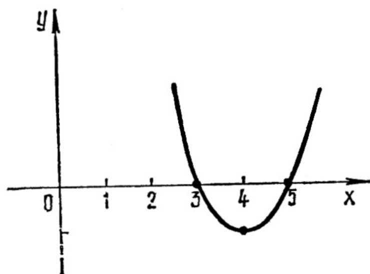
Kvadratinio trinario x^2-x-6 grafikas yra parabolė, kuri kerta ašį Ox taškuose $x_1=-2$, $x_2=3$. Parabolės šakos nukreiptos į viršų, nes $a>0$ (64 pav.). Kai $x<-2$ arba $x>3$, minėtojo trinario grafikas yra virš ašies Ox, taigi su tomis reikšmėmis trinaris yra teigiamas.

Ats. $x\in(-\infty, -2)\cup(3, +\infty)$.

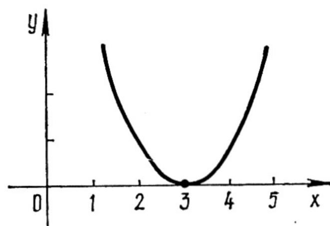
2. $x^2-8x+15\leqslant 0$.

Trinario šaknys yra $x_1=3$, $x_2=5$. Jo grafikas — parabolė, kuri

kerta ašį Ox taškuose $x_1=3$, $x_2=5$. Parabolės šakos nukreiptos į viršų, nes $a>0$. Iš grafiko matyti (65 pav.), kad trinaris $x^2-8x+15$ yra neigiamas arba lygus nuliui, kai $x\in[3, 5]$.



65 pav.



66 pav.

3. $x^2-6x+9>0$.

Kadangi $D=36-36=0$, tai $x_1=x_2=3$, nes

$$x^2-6x+9=(x-3)^2.$$

Trinario x^2-6x+9 grafikas — parabolė liečia ašį Ox taške $x=3$. Trinaris yra teigiamas, kai $x\in R$, tik $x\neq 3$ (žr. 66 pav.).

Ats. $x\in(-\infty, 3)\cup(3, +\infty)$.

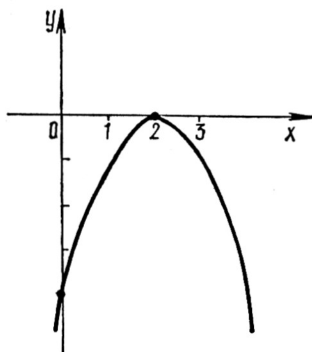
4. $-x^2+4x-4\geqslant 0$.

$$-x^2+4x-4=-(x-2)^2,$$

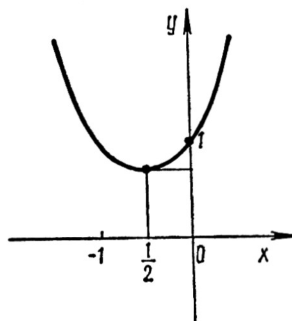
todėl

$$x_1=x_2=2.$$

Trinario $-x^2+4x-4$ $a<0$, taigi jo grafikas yra žemiau ašies Ox. Be to, kai $x=2$, minėtasis trinaris lygus nuliui. Tai reiškia, kad jo grafikas — parabolė liečia ašį Ox (žr. 67 pav.).



67 pav.



68 pav.

Kadangi nelygybėje $-x^2+4x-4\geqslant 0$ yra ir lygybės ženklas, tai tą lygybę tenkins vienintelė reikšmė $x=2$.

5. $x^2+x+1>0$.

Čia $D<0$ ir $a>0$. Tai reiškia, kad trinario x^2+x+1 grafikas yra parabolė, esanti virš ašies Ox. Taigi su bet kokiomis x reikšmėmis trinaris x^2+x+1 yra teigiamas (žr. 68 pav.).

Ats. $x \in R$.

6. $x^2+2x+4<0$.

$D=4-16=-12<0$, todėl trinaris x^2+2x+4 neturi realių šaknų. Be to, $a>0$, todėl jo grafikas — parabolė yra virš ašies Ox, taigi trinaris x^2+2x+4 negali būti neigiamas.

Ats. $x \in \varnothing$.

3.13. Bikvadratinė lygtis ir jos sprendimas

Lygtis

$$ax^4+bx^2+c=0, \quad (1)$$

kai $a \neq 0$, vadinama *bikvadratine* lygtimi. Pažymėjus $x^2=y$, bikvadratinė lygtis pakeičiama kvadratine lygtimi su kintamuoju y:

$$ay^2+by+c=0. \quad (2)$$

Jeigu $D=b^2-4ac$ yra neneigiamas skaičius, tai (2) lygtis turi dvi realias skirtingas šaknis arba vieną kartotinę šaknį

$$y_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Jeigu abi šios šaknys yra neneigiamos, iš lygties $x^2=y$, vietoj y paėmus y_1 ir y_2 reikšmes, gaunamos keturios x reikšmės, t. y. keturios (1) lygties realios šaknys:

$$\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.} \quad (3)$$

Jeigu (2) lygties viena šaknis yra neigiama, tai (1) lygtis turi tik dvi realias šaknis. Jeigu abi (2) lygties šaknys yra neigiamos, tai (1) lygtis neturi realių šaknų.

Pavyzdžiai. 1. Spręsime bikvadratinę lygtį

$$9x^4-37x^2+4=0.$$

Pažymėję $x^2=y$, sąlygos lygtį pakeičiame lygtimi $9y^2-37y+4=$ $=0$ ir ieškome pastarosios šaknų:

$$y=\frac{37 \pm \sqrt{1369-144}}{18}=\frac{37 \pm \sqrt{1225}}{18}=\frac{37 \pm 35}{18},$$

$$y_1=\frac{37-35}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}, \quad y_2=\frac{37+35}{18}=\frac{72}{18}=4.$$

Rastąsias y reikšmes įrašome į išraišką $x^2=y$:

$$x^2=\frac{1}{9}, \qquad x^2=4,$$

$$x_1=-\frac{1}{3}, \qquad x_3=-2,$$

$$x_2=\frac{1}{3}, \qquad x_4=2.$$

Ats. $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$, $x_{3,4}=\pm 2$.

Spręsdami lygtį $x^2=m$ pastebime, kad ji turi realias šaknis tik tada, kai $m\geqslant 0$.

2. Rasime lygties

$$x^4-5x^2-36=0$$

šaknis.

Pritaikę keitinį $x^2=y$, gauname lygtį $y^2-5y-36=0$ ir randame jos šaknis:

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{5\pm 13}{2};$$

$$y_1=-4, \qquad y_2=9.$$
$$x^2=-4, \qquad x^2=9,$$
$$x\in\varnothing, \qquad x_1=-3,$$
$$x_2=3.$$

Ats. $x_1=-3$, $x_2=3$.

3.14. Iracionalioji lygtis ir jos sprendimas

Lygtis, kurioje kintamasis yra po šaknies ženklu, vadinama *iracionaliąja*. Pavyzdžiui, $\sqrt{x}=3$, $2\sqrt{x-1}+x=7$, $\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}=3$, $\sqrt[3]{x-1}=x-2$ yra iracionaliosios lygtys. Spręsdami tokias lygtis, jas pertvarkome į lygtis, kuriose nėra kintamojo po šaknies ženklu. To pasiekiame keldami abi lygties puses tam tikru laipsniu.

Iracionaliųjų lygčių visos šaknys turi tik aritmetines reikšmes. Jeigu lygtyje yra narių, kurių šaknys yra lyginio laipsnio, tai pačios šaknys ir reiškiniai, esantys po šaknies ženklu, turi būti neneigiami. Pavyzdžiui, lygtyje $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$ turi būti $x-1\geqslant 0$ ir $x+1\geqslant 0$, arba

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 1.$$

Šios kintamojo x reikšmės sudaro lygties apibrėžimo sritį. Lygtys $\sqrt{x+2}=-5$, $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=-2$ sprendinių neturi, nes imamos tik aritmetinės šaknys.

Sprendžiant iracionaliąją lygtį, abi jos puses reikia kelti lyginiu arba nelyginiu laipsniu. Jeigu abi lygties pusės keliamos nelyginiu

laipsniu (dažniausiai keliama kubu), tai gaunama lygtis, ekvivalenti pradinei, t. y.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n-1}=(g(x))^{2n-1}, \qquad n\in N.$$

Pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$\sqrt[3]{x^3-7}+1=x.$$

Palikę radikalą vienoje lygties pusėje, o kitus narius perkėlę į kitą pusę ir abi lygties puses pakėlę kubu, gauname:

$$\sqrt[3]{x^3-7}=x-1,$$
$$x^3-7=x^3-3x^2+3x-1,$$
$$3x^2-3x-6=0,$$
$$x^2-x-2=0,$$
$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2},$$
$$x_1=-1, \qquad x_2=2.$$

Ats. Abi šaknys tenkina pradinę lygtį.

Pakėlę lygtį $f(x)=g(x)$ lyginiu laipsniu, bendruoju atveju gauname lygtį

$$(f(x))^{2n}=(g(x))^{2n},$$

neekvivalenčią pradinei (čia $n\in N$). Gautoji lygtis ekvivalenti lygčių $f(x)=g(x)$ ir $f(x)=-g(x)$ visumai.

Pavyzdžiui, lygtis $3x-4=2$ nėra ekvivalenti lygčiai $(3x-4)^2=2^2$, nes pirmoji lygtis turi vieną šaknį $x=2$, o antroji dvi: $x_1=2/3$, $x_2=2$. $x=\frac{2}{3}$ yra lygties $3x-4=2$ pašalinė šaknis.

Neatsižvelgę į apibrėžimo sritį ir sudauginę, pavyzdžiui, lygties $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$ kairėje pusėje esančias šaknis, gauname lygtį $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$, kurios šaknys yra $x_1=-2$, $x_2=2$. Tačiau -2 nėra pradinės lygties sprendinys, nes nepriklauso jos apibrėžimo sričiai.

Išvada. *Jeigu iracionalioji lygtis yra sprendžiama abi jos puses keliant lyginiu laipsniu, tai rastąsias kintamojo reikšmes reikia tikrinti įrašant jas į pradinę lygtį.* Atsakymas užrašomas tik po tikrinimo.

Pašalinės šaknys gali atsirasti ir tuo atveju, kai praplečiama lygties apibrėžimo sritis atliekant tapačiuosius pertvarkius.

Iracionaliąsias lygtis kartais patogu spręsti pakeitus jas ekvivalenčiomis sistemomis:

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (g(x))^{2n}=f(x), \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Pavyzdžiai. Išspręsime iracionaliąją lygtį

$$\sqrt{3x-3}=x-1.$$

Šią lygtį pakeičiame jai ekvivalenčia sistema:

$$\begin{cases} 3x-3=(x-1)^2, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3=x^2-2x+1, \\ x\geqslant 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=4, \\ x\geqslant 1. \end{cases}$$

Kai $x=1$ arba $x=4$, teisinga nelygybė $x\geqslant 1$. Todėl abi rastosios x reikšmės yra pradinės lygties šaknys.

Ats. $x_1=1$, $x_2=4$.

2. Išspręsime lygtį $\sqrt{x-2}=x-8$.

$$\sqrt{x-2}=x-8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8\geqslant 0. \end{cases}$$

Išsprendę lygtį $x-2=(x-8)^2$, gauname $x_1=6$, $x_2=11$. Tačiau nelygybė $x-8\geqslant 0$ teisinga tada, kai $x=11$.

Ats. $x=11$.

3. Rasime lygties $x+\sqrt{x-1}=7$ šaknis.

$$\sqrt{x-1}=7-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=(7-x)^2, \\ 7-x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-15x+50=0, \\ x\leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Ats. $x=5$.

4. Spręsime lygtį $5+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+17}$. Jos apibrėžimo sritis yra

$$\begin{cases} x-7\geqslant 0, \\ x+17\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 7, \\ x\geqslant -17 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 7.$$

Abi lygties puses keliame kvadratu:

$$25+10\sqrt{x-7}+x-7=x+17,$$

$$10\sqrt{x-7}=-1.$$

Lygtis $10\sqrt{x-7}=-1$ neturi šaknų, nes $\sqrt{x-7}\geqslant 0$.

Ats. Lygtis neturi šaknų.

5. Išspręsime lygtį

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}.$$

Šios lygties apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} 3x-2\geqslant 0, \\ 5x-1\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant \frac{2}{3}, \\ x\geqslant \frac{1}{5}, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 1.$$

Pakėlę abi pradinės lygties puses kvadratu, gauname:

$$3x-2+2\sqrt{(3x-2)(5x-1)}+5x-1=x-1,$$

$$2\sqrt{15x^2-13x+2}=2-7x; \qquad (1)$$

čia $2-7x\geqslant 0 \Leftrightarrow 7x\leqslant 2 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{2}{7}$.

Šios x reikšmės nepriklauso lygties apibrėžimo sričiai, todėl pradinė lygtis sprendinių neturi.

P a s t a b a. (1) ir panašias lygtis galime spręsti ir kitaip:

$$2\sqrt{15x^2-13x+2}=2-7x,$$

$$4(15x^2-13x+2)=4-28x+49x^2,$$

$$11x^2-24x+4=0,$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-44}}{11}=\frac{12\pm 10}{11};$$

$$x_1=\frac{2}{11}, \qquad x_2=2.$$

P a t i k r i n i m a s. 1. Rastąją kintamojo x reikšmę $x=\frac{2}{11}$ įrašome į pradinę lygtį $\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}$:

$$\sqrt{\frac{6}{11}-2}+\sqrt{\frac{10}{11}-1}=\sqrt{\frac{2}{11}-1}.$$

Gavome lygybę, kurios visi pošakniai yra neigiami, todėl $x=\frac{2}{11}$ nėra lygties šaknis.

2. Lygties

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}$$

netenkina ir reikšmė $x=2$:

$$\sqrt{6-2}+\sqrt{10-1}\neq\sqrt{2-1},$$

$$2+3\neq 1,$$

$$5\neq 1.$$

Ats. Pradinė lygtis neturi sprendinių.

6. Rasime lygties $x^2-x+3\sqrt{x^2-x-5}=9$ šaknis.

Pažymėkime

$$x^2-x-5=y.$$

Išreiškime x^2-x:

$$x^2-x=y+5.$$

Gautąsias išraiškas įrašę į pradinę lygtį, turime:

$$y+5+3\sqrt{y}=9,$$

$$3\sqrt{y}=4-y.$$

Šios lygties apibrėžimo sritis yra

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ 4-y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow y \in [0,\ 4].$$

Lygtį $3\sqrt{y}=4-y$ pakėlę kvadratu gauname:

$$9y=16-8y+y^2,$$

$$y_2-17y+16=0,$$

$$y=\frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4}-16}=\frac{17}{2} \pm \frac{15}{2};$$

$$y_1=1, \qquad y_2=16.$$

Antroji y reikšmė ($y=16$) nepriklauso lygties $3\sqrt{y}=4-y$ apibrėžimo sričiai. Minėtąją lygtį tenkina $y_1=1$. Įrašome šią y reikšmę į išraišką $x^2-x-5=y$:

$$x^2-x-5=1,$$

$$x^2-x-6=0,$$

$$x=\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$$x_1=-2, \qquad x_2=3.$$

Ats. Pradinės lygties šaknys yra $x_1=-2$ ir $x_2=3$.

3.15. Netiesinių lygčių sistemos sprendimas

Išspręsti lygčių sistemą su dviem kintamaisiais — reiškia rasti visas tokias kintamųjų poras, kurios tenkintų abi sistemos lygtis. Nagrinėsime dviejų lygčių su dviem kintamaisiais sistemų sprendimą, kai viena sistemos lygtis yra tiesinė (pirmojo laipsnio), o kita — antrojo laipsnio arba abi sistemos lygtys yra antrojo laipsnio.

Universalaus būdo minėtoms lygčių sistemoms spręsti nėra. Išnagrinėsime kai kuriuos netiesinių lygčių sistemų sprendimo atvejus.

3.15.1. Lygčių sistemos sprendimas keitimo būdu. Jeigu lygčių sistemos viena lygtis yra antrojo laipsnio, o kita — pirmojo, tai sistemą paprastai sprendžiame keitimo būdu. Iš pirmojo laipsnio lygties išreiškiame kurį nors kintamąjį ir jo išraišką įrašome į kitą lygtį.

Pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=12, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Iš antrosios lygties išreiškę kintamąjį x ir įrašę jo išraišką į pirmąją lygtį, gauname:

$$x=2+y,$$

$$(2+y)^2-(2+y)y+y^2=12,$$
$$4+4y+y^2-2y-y^2+y^2-12=0,$$
$$y^2+2y-8=0,$$
$$y=-1\pm\sqrt{1+8}, \qquad y=-1\pm3,$$
$$y_1=-4, \qquad y_2=2.$$

Rastąsias y reikšmes įrašome į išraišką $x=2+y$:

$$x_1=2-4=-2, \qquad x_2=2+2=4.$$

Kintamųjų x_1 ir y_1, x_2 ir y_2 poros yra pradinės lygčių sistemos sprendiniai.

Ats. $(-2, -4)$, $(4, 2)$.

3.15.2. Lygčių sistemų sprendimas kitais būdais. Nagrinėsime dažniau pasitaikančių lygčių sistemų sprendimą.

1. Imkime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Šią sistemą spręsime remdamiesi Vieto teorema (beje, ją galime spręsti ir keitimo būdu). Kadangi sistemoje yra kintamųjų x ir y suma ir sandauga, tai pagal Vieto teoremą galime parašyti kvadratinę lygtį, kurios šaknys yra pradinės sistemos sprendiniai:

$$z^2-5z+6=0,$$
$$z=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$
$$z_1=2, \qquad z_2=3.$$

Taigi $x_1=2$, $y_1=3$, arba $x_2=3$, $y_2=2$.

Ats. $(2, 3)$, $(3, 2)$.

2. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$$

Antrąją sistemos lygtį dauginame iš 2 ir abi lygtis sudedame:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 2xy=12; \end{cases}$$
$$\overline{x^2+2xy+y^2=25,}$$
$$(x+y)^2=25,$$
$$|x+y|=5.$$

Gautąją lygtį (modulį) jungiame su antrąja pradinės sistemos lygtimi ir sprendžiame dvi sistemas:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Jos sprendžiamos remiantis Vieto teorema:

$$z^2-5z+6=0, \qquad t^2+5t+6=0,$$

$$z_1=2, \quad z_2=3, \quad t=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$

$$x_1=2, \quad y_1=3, \quad t_1=-3, \quad t_2=-2,$$

arba

$$x_2=3, \quad y_2=2, \quad x_3=-3, \quad y_3=-2,$$

arba

$$x_4=-2, \quad y_4=-3.$$

Ats. (2, 3), (3, 2), (−3, −2), (−2, −3).

Tą pačią sistemą galime spręsti ir keitimo būdu, išreiškę iš antrosios lygties kurį nors kintamąjį.

3. Rasime sistemos

$$\begin{cases} x^3+y^3=72, \\ x+y=6 \end{cases}$$

sprendinius.

Kadangi $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, tai

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=72, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Į pirmąją lygtį vietoje $x+y$ įrašome 6 ir gauname

$$\begin{cases} 6(x^2-xy+y^2)=72, \\ x+y=6, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=12, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Gautąją sistemą sprendžiame keitimo būdu:

$$x=6-y,$$
$$(6-y)^2-(6-y)y+y^2=12,$$
$$36-12y+y^2-6y+y^2+y^2-12=0,$$
$$3y^2-18y+24=0,$$
$$y^2-6y+8=0,$$
$$y=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1,$$
$$y_1=2, \qquad y_2=4.$$

Rastąsias y reikšmes įrašome į išraišką $x=6-y$:

$$x_1=6-2=4, \qquad x_2=6-4=2.$$

Ats. (4, 2), (2, 4).

3.15.3. Lygčių sistemų sprendimas įvedant naujus kintamuosius. Šį būdą aiškinsime spręsdami pavyzdžius.

1. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

Pažymėkime $\frac{x}{y} = z$. Tada $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$. Įrašome šiuos keitinius į pirmąją sistemos lygtį:

$$z - \frac{1}{z} = \frac{3}{2},$$

$$z - \frac{1}{z} - \frac{3}{2} = 0,$$

$$\frac{2z^2 - 2 - 3z}{2z} = 0.$$

Trupmena lygi nuliui tada, kai jos skaitiklis lygus nuliui, o vardiklis nelygus nuliui. Taigi

$$\begin{cases} 2z^2 - 3z - 2 = 0, \\ 2z \neq 0. \end{cases}$$

Sprendžiame kvadratinę lygtį

$$2z^2 - 3z - 2 = 0;$$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4},$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}, \qquad z_2 = 2.$$

Iš nelygybės $2z \neq 0$ aišku, kad $z \neq 0$.

Atsižvelgę į tai, kad $\frac{x}{y} = z$, sudarome sistemų visumą:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ \dfrac{x}{y} = 2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x = -\dfrac{1}{2} y, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x = 2y. \end{cases} \end{array}\right.$$

Išsprendę abi sistemas, gauname pradinės sistemos sprendinius:

$$(2, -4), (-2, 4), (-4, -2), (4, 2).$$

2. Sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{13}{36} \end{cases}$$

sprendžiame taikydami keitinius

$$\frac{1}{x}=u, \quad \frac{1}{y}=v.$$

Šiuos keitinius įrašome į pradinę sistemą ir gauname

$$\begin{cases} u+v=\frac{5}{6}, \\ u^2+v^2=\frac{13}{36}. \end{cases}$$

Siūlome šią sistemą toliau spręsti savarankiškai.

3. Spręsime sistemą

$$\begin{cases} x+y=xy+1, \\ x^2+y^2=xy+3. \end{cases}$$

Pažymėkime $x+y=u$, $xy=v$. Tada

$$u^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2+y^2+2v,$$
$$x^2+y^2=u^2-2v.$$

Atsižvelgę į gautąsias išraiškas, pradinę sistemą perrašome šitaip:

$$\begin{cases} u=v+1, \\ u^2=3v+3. \end{cases}$$

Radę u ir v reikšmes ir atsižvelgę į išraiškas $x+y=u$, $xy=v$, gauname pradinės sistemos sprendinius

$$(1, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 1).$$

Patikrinkite!

3.15.4. Lygčių sistemų, kuriose nėra pirmojo laipsnio narių, sprendimas.

Pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$$

Pažymėję $x=ty$ ir įrašę į sistemos lygtis, turime:

$$\begin{cases} t^2y^2-3ty^2+y^2=-1, \\ 3t^2y^2-ty^2+3y^2=13, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2(t^2-3t+1)=-1, \\ y^2(3t^2-t+3)=13. \end{cases}$$

Padalĳę pirmąją lygtį iš antrosios, gauname

$$\frac{t^2-3t+1}{3t^2-t+3}=-\frac{1}{13}.$$

Pritaikę pagrindinę proporcijos savybę, sprendžiame:

$$13t^2-39t+13=-3t^2+t-3,$$
$$16t^2-40t+16=0,$$
$$2t^2-5t+2=0,$$
$$t_1=\frac{1}{2}, \qquad t_2=2.$$

Sudarome dviejų sistemų visumą:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1,\\ x=\frac{1}{2}y,\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1,\\ x=2y.\end{cases}\end{array}\right.$$

Išsprendžiame tas sistemas ir gauname pradinės sistemos sprendinius:

$$(-1,\ -2),\ (1,\ 2),\ (-2,\ -1),\ (2,\ 1).$$

3.16. Pratimai

1. Raskite šių reiškinių apibrėžimo sritis:

1) $\frac{2x+1}{7}$; 2) $\frac{2}{3x-1}$;

3) $\frac{5x+1}{2-x}$; 4) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}$;

5) $\frac{x^2+4}{1-2x}$; 6) $\frac{2x}{x+6}$.

2. Raskite lygčių apibrėžimo sritis:

1) $\frac{2x-5}{3+x}=0$; 2) $\frac{x^2-5x}{10-2x}=0$;

3) $\frac{x(x-5)-0{,}5x(2x-10)}{x-2}=0$; 4) $\frac{x^2+8x}{x}=0$;

5) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$; 6) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$.

3. Išspręskite lygtis:

1) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{2}=19$, 2) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}x-\frac{2x}{9}=13$,

3) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$,

4) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$,

5) $\frac{2x-3}{5}-\frac{x+6}{4}=0$, 6) $x-\frac{x-12}{5}=0$,

7) $\frac{5x-6}{3}-\frac{5x+6}{12}=0$, 8) $\frac{3x-4}{4}-\frac{11-2x}{3}=1$,

9) $\frac{5x-8}{3}-\frac{16-3x}{4}=3$, 10) $\frac{5x-7}{2}-\frac{14-3x}{5}=3$.

4. Išspręskite lygtis:

1) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$, 2) $\frac{3}{y-2}=\frac{2}{y-3}$,

3) $\frac{x}{x-5}-\frac{x-2}{x-6}=0,$ 4) $\frac{z+1}{z-1}-\frac{z-5}{z-3}=0,$

5) $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5}{x-2}=1,$ 6) $\frac{14}{3t-12}-\frac{2+t}{t-4}=\frac{3}{8-2t}-\frac{5}{6},$

7) $\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2},$ 8) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x},$

9) $\frac{t^2-3}{1-t^2}+\frac{t+1}{t-1}=\frac{4}{1+t},$ 10) $\frac{y^2+17}{y^2-1}=\frac{y-2}{y+1}-\frac{5}{1-y},$

11) $\frac{2x-2}{x^2-36}-\frac{x-2}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0,$ 12) $\frac{1}{u-3}+\frac{4}{u+1}=\frac{4}{(u-3)(u+1)}.$

5. Išreikškite į formules įeinančias raides:

1) $c(1+kn)=1-kn;$ 2) $k(z-tr)=z+tr;$

3) $t(a+1)=ab-1;$ 4) $mn(u-v)=u+v;$

5) $\frac{k+1}{k-1}=\frac{1-l}{1+l};$ 6) $a=\frac{b+c}{c(1-b)};$

7) $4SR=abc;$ 8) $s=\frac{i_1 i_2}{2};$

9) $s=\frac{a+b}{2}h;$ 10) $v=v_0+at;$

11) $v^2=2gs;$ 12) $c=\frac{\varepsilon s}{4\pi l};$

13) $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2};$ 14) $Q=(m+Mc)(t_2-t_1);$

15) $\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right);$ 16) $I=\frac{U}{R+nR_1}.$

6. Išspręskite šiuos uždavinius.

1) Trijose grupėse yra 95 moksleiviai. Pirmoje grupėje yra 4 moksleiviais daugiau negu antroje, bet 3 moksleiviais mažiau negu trečioje. Kiek moksleivių yra kiekvienoje grupėje?

2) Per technikumo moksleivių olimpiadą buvo pateikta spręsti 10 uždavinių. Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį buvo skiriami 5 taškai, o už neišspręstą uždavinį nurašomi 3 taškai. Kiek uždavinių teisingai išsprendė moksleivis, jeigu jis surinko 34 taškus?

3) Traukinys, nuvažiavęs 2/7 kelio AB, buvo sustabdytas 15 minučių. Kad jis atvyktų nustatytu laiku į B, jo greitis buvo padidintas 1,2 karto. Apskaičiuokite traukinio pradinį greitį, kai atstumas tarp A ir B yra 160 km.

4) Mašinų gamybos užsakymą pagal planą fabrikas turėjo atlikti per 15 dienų. Tačiau likus dviem dienoms iki termino, fabrikas ne tik įvykdė planą, bet ir virš plano pagamino 6 mašinas, nes kasdien pagamindavo dvi mašinas virš plano. Kiek mašinų fabrikas turėjo pagaminti pagal planą?

7. Pavaizduokite grafiškai šias lygtis:

1) $y=x-2;$ 2) $2x+y=4;$
3) $x-y=0;$ 4) $x+y=0.$

8. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases}2x+3y=21,\\3x-2y=-1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y=-7,\\2x+y=11;\end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x-y=7, \\ x-4y=-17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x+2y=28, \\ 4x-3y=-3. \end{cases}$

9. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x-3y=13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+5y=5, \\ 2x-3y=17; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+4y=-4, \\ 3x-y=15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x-2y=2, \\ 2x+5y=-7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-2y=10, \\ 3x+4y=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x+3y=7, \\ 5x-4y=32; \end{cases}$

7) $\begin{cases} -2x+7y=-29, \\ 3x-2y=18; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 3x-2y=18. \end{cases}$

10. Įrodykite, kad šios sistemos turi be galo daug sprendinių:

1) $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+2y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=5, \\ 3x-3y=15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=4-y, \\ y=4-x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=10, \\ \frac{3x}{2}-\frac{3y}{2}=15; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 3x+4{,}5y=6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x+y=3, \\ \frac{8}{3}x+\frac{2}{3}y=2. \end{cases}$

11. Įrodykite, kad šios lygčių sistemos neturi sprendinių:

1) $\begin{cases} x+y=3, \\ x+y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=1, \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=4, \\ 2x-2y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x=5-2y. \end{cases}$

12. Sudarykite lygčių sistemas, kurių sprendiniai yra skaičių poros (2, 3), (−4, 5), (1, 5), (−2, 4), (1, 2).

13. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \\ \frac{x}{4}+\frac{2y}{3}=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y}{4}+\frac{z}{4}=2, \\ \frac{y}{6}+\frac{z}{3}=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2x}{9}-\frac{y}{4}=11, \\ \frac{5x}{12}+\frac{1}{3}y=19; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{5m}{2}+\frac{n}{5}=-4, \\ \frac{m}{3}+\frac{n}{6}=\frac{1}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{u+v}{2}-\frac{2v}{3}=\frac{5}{2}, \\ \frac{3u}{2}+2v=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{a+3}{2}-\frac{b-2}{3}=2, \\ \frac{a-1}{4}+\frac{b+1}{3}=4. \end{cases}$

14. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{9}{2}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=-\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1. \end{cases}$

15. Išspręskite lygčių sistemas įvedę naujus kintamuosius:

1) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+y}+\dfrac{7}{x-y}=\dfrac{19}{10}, \\ \dfrac{5}{x-y}-\dfrac{2}{2x+y}=\dfrac{23}{20}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{8}{3x-2y}-\dfrac{8}{3x+2y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{3x-2y}+\dfrac{16}{3x+2y}=1\dfrac{1}{8}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-5y}+\dfrac{11}{3x+5y}=1, \\ \dfrac{4}{3x-5y}+\dfrac{22}{3x+5y}=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-y-x}=\dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0{,}3. \end{cases}$

16. Išspręskite lygčių sistemas su trimis ir keturiais kintamaisiais:

1) $\begin{cases} 2x-4y+5z=9, \\ 4x+y-2z=0, \\ -3x+2y+z=4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x+5y-3z=5, \\ 3x-4y+z=-2, \\ -x+y+z=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=9, \\ x-y-z=-5, \\ 2x+3y+4z=29; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y-z=5, \\ y-x-z=1, \\ z-x-y=-15; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-2y+4z=6, \\ 2x-y+3z=11, \\ 4x+y-5z=9; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+2y-z=9, \\ 2x-y+3z=13, \\ 3x+2y-5z=-1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ 2x+y-4z=9, \\ 6x-5y+2z=17; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+y-3z=-1, \\ x-3y+2z=10, \\ 3x-4y-z=5; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-2y+2z=0, \\ 3x+y-4z=0, \\ -2x+2y-z=0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x+3y+4z=0, \\ x-2y+5z=0, \\ 3x+8y+3z=0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+y+z+t=10, \\ x-y+z-t=-2, \\ 3x-2y+z-2t=-6, \\ 2x+4y-3z+t=5; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 4x-y+2z-3t=-4, \\ 5x+2y-3z+2t=8, \\ -3x+4y-2z+3t=11, \\ 2x-3y+4z-t=4; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+y+z+t=10, \\ x+z+2t=12, \\ 2y-2z+t=2, \\ 3x-4y+3z=4; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 5x+2y-3z+t=4, \\ 4x-6y+z+2t=1, \\ -2x+3y+2z-2t=2, \\ x-y+2z-t=1. \end{cases}$

17. Išspręskite nelygybes:

1) $3-2x<12-5x$, 2) $2x-3\leqslant 7(1+x)$,

3) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}<2+\frac{x}{6}$, 4) $\frac{3x+5}{4}-1\leqslant\frac{x-2}{3}+x$,

5) $\frac{4-x}{5}-5x>0$, 6) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}\leqslant 4$,

7) $\frac{2x-1}{4}+\frac{x+3}{2}>1$, 8) $(x-1)^2\geqslant(x+3)(x-3)$,

9) $(2x+1)^2\leqslant(2x+\sqrt{15})(2x-\sqrt{15})$, 10) $(x-1)^2<(x-1)^2$.

18. Išspręskite nelygybių sistemas:

1) $\begin{cases} 3x-5>23-4x, \\ 7x+3<9x-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+1>3x+4, \\ 5x+3\geqslant 8x+21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-2\geqslant 2x+1, \\ 2x+3<18-3x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-1>2x-3, \\ 4x+5>x+17; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x-3)(x-4)<(x+1)(x+2), \\ x(x+1)+x(x+2)>(2x-1)(x+3). \end{cases}$

19. Išspręskite nelygybes:

1) $\frac{7-x}{x-2}>0$, 2) $\frac{y-5}{2y+8}>0$, 3) $\frac{2a-4}{3-9a}\leqslant 0$, 4) $\frac{b-1}{b+3}>2$,

5) $\frac{4-3z}{3-2z}\leqslant 1$, 6) $\frac{9x}{10+x}>4$, 7) $\frac{5-x}{x-6}\leqslant\frac{2}{3}$, 8) $(x-1)(x-2)>0$,

9) $(x+3)(x-5)\leqslant 0$, 10) $(x+7)(x+5)>0$, 11) $(x+5)(x-2)\leqslant 0$.

20. Raskite funkcijų apibrėžimo sritis:

1) $y=\sqrt{\frac{x-2}{1-3x}}$, 2) $y=\sqrt{\frac{2x-1}{x-3}}$, 3) $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$,

4) $y=\sqrt{(x+4)(x-3)}$.

21. Išspręskite dvigubas nelygybes:

1) $-7\leqslant 1-4x\leqslant 9$, 2) $2\frac{1}{3}\leqslant\frac{3x+1}{6}<4\frac{2}{3}$,

3) $-2\leqslant 2x-4\leqslant 6$, 4) $1\leqslant\frac{x+2}{x-4}\leqslant 4$, 5) $-4<\frac{x+2}{x-4}<4$.

22. Išspręskite nelygybes su moduliu:

1) $|x-2|\leqslant 3$, 2) $|x+3|>5$,

3) $|2x-3|<5$, 4) $|3x+7|\geqslant 10$,

5) $\sqrt{(3x+1)^2}<2-x$, 6) $\sqrt{(2x+1)^2}<4x-3$,

7) $\sqrt{(2x+4)^2}>3x-1$, 8) $\frac{x+1}{2x-1}\geqslant|x|+1$,

9) $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1,$ 10) $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2,$

11) $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3,$ 12) $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

23. Ar ekvivalenčios šios nelygybės:

1) $(x-1)(x+2)>0$ ir $\frac{x-1}{x+2}<0;$

2) $(x-3)(x+4)\geqslant 0$ ir $\frac{x-3}{x+4}\geqslant 0?$

24. Išspręskite nepilnąsias kvadratines lygtis:

1) $3x^2-12x=0;$ 2) $5x^2-75x=0;$

3) $2x^2-2450=0;$ 4) $x^2-1225=0;$

5) $3x^2+27=0;$ 6) $mx^2-nx=0.$

25. Išspręskite kvadratines lygtis:

1) $x^2-8x+15=0;$ 2) $3x^2-10x+3=0;$

3) $4x^2-17x+4=0;$ 4) $5x^2-21x+5=0;$

5) $49x^2-28x+4=0;$ 6) $3x^2-12x-37=0;$

7) $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2};$ 8) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{2-x}{1-x}+\frac{4}{x-1}=0;$

9) $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x};$ 10) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x-1};$

11) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1;$ 12) $\frac{7}{x+1}+\frac{x+4}{2x-2}=\frac{3x^2-38}{x^2-1};$

13) $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4};$ 14) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{3(2x-1)}{7(2x+1)}-\frac{8x}{4x^2-1}=0;$

15) $\frac{4}{9x^2-1}-\frac{4}{3x+1}-\frac{x}{1-3x}=0.$

26. Išspręskite šiuos uždavinius:

1) Du darbininkai, dirbdami kartu, gali atlikti tam tikrą darbą per 12 dienų. Jeigu vienas darbininkas iš pradžių atliktų pusę darbo, o kitą pusę darbo — kitas darbininkas, tai jiems prireiktų 25 dienų. Per kiek dienų šį darbą gali atlikti kiekvienas darbininkas atskirai?

2) Du automobiliai išvažiavo iš vieno miesto į kitą. Pirmasis važiavo 10 km per valandą greičiau už antrąjį, todėl į vietą atvyko 1 valanda anksčiau. Atstumas tarp miestų — 560 km. Koks kiekvieno automobilio greitis?

3) Motorinė valtis per 5 h pasroviui nuplaukia 42 km, o prieš srovę — 20 km. Raskite valties greitį stovinčiame vandenyje, jeigu upės tėkmės greitis yra 2 km/h;

4) Stačiakampio ilgis 4 cm didesnis už plotį, o jo plotas lygus 60 cm². Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą;

5) Po dviejų perkainavimų vienodu procentu 25 rb kainavusi prekė buvo parduota už 20 rb 25 kp. Kiek procentų kiekvieną kartą sumažėjo prekės kaina?

27. Su kokiomis m reikšmėmis lygties šaknys yra tarpusavyje lygios:

1) $(m-1)x^2-2(m+1)x+m-2=0;$

2) $mx^2-(1-2m)x+m=0;$

3) $(m-1)x^2+2mx+3m-2=0$;
4) $x^2+2(m-1)x+3m^2+5=0$;
5) $2x^2+(m-9)x+m^2+3m+4=0$;
6) $(4m-3)x^2-3(m+1)x+2(m+1)=0$?

28. Sudarykite kvadratines lygtis, kurių šaknys yra:

1) 3 ir $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$ ir $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ir $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ir $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 5) $\frac{5}{4+\sqrt{6}}$ ir $\frac{5}{4-\sqrt{6}}$;

6) $\frac{a+b}{2}$ ir $\frac{a-b}{2}$; 7) $\frac{a+b}{a-b}$ ir $-\frac{a-b}{a+b}$.

29. Išspręskite grafiškai šias kvadratines lygtis:

1) $x^2-4x+3=0$; 2) $x^2-x-2=0$;
3) $x^2-x-6=0$; 4) $2x^2-3x-4=0$;
5) $x^2-4x+4=0$; 6) $x^2-6x+9=0$;
7) $4x^2+12x+9=0$; 8) $2x^2-4x+5=0$;
9) $x^2+2x+2=0$; 10) $2x^2+2x+1=0$.

30. Suprastinkite trupmenas:

1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x-8}$; 2) $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-6x-8}$;

3) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$; 4) $\frac{2x^2-7x+3}{8x^2-6x+1}$;

5) $\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}$; 6) $\frac{9x^2-6x+1}{9x^2-9x+2}$;

7) $\frac{x^2-2ax+a^2-1}{x^2-2(a+1)x+(a+1)^2}$; 8) $\frac{x^2-2ax+a^2-4}{x^2-2(a+2)x+(a+2)^2}$.

31. Išspręskite nelygybes:

1) $x^2-2x+1\leqslant 0$; 2) $x^2-6x+9<0$;
3) $-5x^2+3x+2\geqslant 0$; 4) $3x^2-x+2>0$;
5) $4x^2-12x+9>0$; 6) $-(3x+1)^2>0$;
7) $2x^2-3x+4>x^2+2x-2$; 8) $\frac{x^2-3x+2}{x-3}>0$;

9) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}>0$; 10) $\frac{0{,}5}{x-x^2-1}<0$;

11) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}\leqslant 0$; 12) $\frac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5}>0$;

13) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}\leqslant 0$; 14) $\frac{x^2-6x+9}{5-4x-x^2}\geqslant 0$;

15) $\frac{4}{1+x}+\frac{2}{1-x}<1$; 16) $\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x-3}+1<0$;

17) $\frac{x^2-4x+5}{x^2+5x+6}\geqslant 0$;

18) Kokios turi būti parametro a reikšmės, kad nelygybę

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

tenkintų bet kurios x reikšmės?

19) $|x^2-5x|\geqslant 6$; 20) $\frac{(x^2-3x+2)(x^2+2x+2)}{(x-3)(x-1-2x^2)}\geqslant 0$.

32. Pavaizduokite šių nelygybių sprendinius grafiškai:

1) $2x+y+1>0$; 2) $y-2x+2\geqslant 0$;
3) $-x+y\geqslant 2$; 4) $x+y-2<0$;
5) $y\geqslant 2$; 6) $x\leqslant -1$;
7) $y\leqslant 1$.

33. Pavaizduokite nelygybių sistemų sprendinius grafiškai:

1) $\begin{cases} y-5x-1\geqslant 0, \\ y-5x-4\leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-3x-1\geqslant 0, \\ y+2x-4\leqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y>1, \\ x-y>3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y>1, \\ 4x+4y<8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y\leqslant 0{,}5x+3, \\ y\geqslant -x+3, \\ y\geqslant 2x-6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y\leqslant x+4, \\ y\geqslant x-4, \\ y\leqslant -x+4, \\ y\geqslant -x-4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y-x-2\leqslant 0, \\ y+2x-4\leqslant 0, \\ y+5\geqslant 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 4, \\ x-y-2\leqslant 0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2-y-2\leqslant 0, \\ x+y\leqslant 0; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^2-4x-y+3\leqslant 0, \\ 2x-y-2\geqslant 0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 16, \\ x^2+y^2\geqslant 1; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x+y+2\geqslant 0, \\ x-y+2\geqslant 0, \\ x-y-1\leqslant 0. \end{cases}$

34. Raskite funkcijos $z=7-x-y$ minimumą srityje

$$\begin{cases} 3x+2y\leqslant 15, \\ x+3y\leqslant 12, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

35. Raskite funkcijos

$$z=3x+4y$$

maksimumą srityje

$$\begin{cases} x\leqslant 3, \\ y\leqslant 3, \\ x+y\leqslant 5, \\ x-2y\leqslant 1, \end{cases}$$

kai $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

36. Raskite funkcijos

$$z=20-x-y$$

minimumą srityje

$$\begin{cases} y\leqslant 6, \\ x+3y\leqslant 20, \\ 5x+y\leqslant 30, \end{cases}$$

kai $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

37. Raskite funkcijos

$$z=30-x-4y$$

minimumą srityje

$$\begin{cases} y\leqslant 6, \\ x+3y\leqslant 20, \\ 5x+y\leqslant 30, \end{cases}$$

kai $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

38. Išspręskite bikvadratines lygtis:

1) $12x^4+x^2-6=0$; 2) $6y^4-y^2-15=0$;
3) $z^4+12z^2+32=0$; 4) $3x^4-x^2-2=0$;
5) $2t^4-9t^2+4=0$; 6) $9x^4-37x^2+4=0$;
7) $18y^4-11y^2+1=0$; 8) $12u^4-7u^2+1=0$;
9) $x^4-13x^2+36=0$; 10) $x^4-17x^2+16=0$;
11) $x^4-2ax^2+a^2-1=0$; 12) $y^4-2ay^2+a^2-b^2=0$;
13) $a^2+x^4=2ax^2+4$; 14) $x^4-9=2mx^2-m^2$;
15) $z^4-ab=(a-b)z^2$; 16) $a^2b^2x^4-(a^4+b^4)x^2+a^2b^2=0$.

39. Išskaidykite dauginamaisiais:

1) x^4-12x^2+32; 2) y^4-20y^2+96;
3) $6x^4-5x^2+1$; 4) z^4-5z^2+4.

40. Suprastinkite trupmenas:

1) $\dfrac{a^4-11a^2+24}{a^4-17a^2+72}$; 2) $\dfrac{x^2-5x^2+4}{x^2-10x^2+9}$.

41. Išspręskite lygtis, įvesdami naujus kintamuosius:

1) $(x^2-8)^2+4(x^2-8)-5=0$; 2) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$;

3) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-4=0$;

4) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1}$;

42. Įrodykite, kad šios lygtys neturi sprendinių:

1) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=x-5$; 2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+1}=-7$;
3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3$; 4) $\sqrt{2x-7}+\sqrt{x}=0$;
5) $\sqrt{4-4x}+\sqrt{x-2}=6$.

43. Išspręskite lygtis:

1) $\sqrt{x+3}=x+1$;

2) $3+\sqrt{x-2}=4$;

3) $\sqrt{x+3}=9-x$;

4) $5\sqrt{x-2}=x+2$;

5) $\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+6}=6$;

6) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=1$;

7) $\sqrt{17-\sqrt{x-8}}=4$;

8) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=3$;

9) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$;

10) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$;

11) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4$;

12) $\sqrt{x-5}=3-\sqrt{10-x}$;

13) $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$;

14) $\sqrt{3x-3}=\sqrt{3x+4}-\sqrt{7x-27}$;

15) $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}$;

16) $\sqrt{3x+4}+\frac{12}{\sqrt{3x+4}}=7$;

17) $\frac{\sqrt{3x+4}}{2}+\frac{8}{\sqrt{3x+4}}=4$;

18) $\sqrt{2x+1}+\frac{3}{\sqrt{2x+1}}=4$;

19) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}}=1+x$;

20) $x+2-\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}=0$;

21) $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}-2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}=\frac{7}{3}$;

22) $\sqrt{\frac{x+4}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}=\frac{5}{6}$;

23) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$;

24) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+9x+1}=1$;

25) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

44. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=-1, \\ xy=6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y=-4, \\ xy=21; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4, \\ x+y=6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2=13, \\ 2y-3x=1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}=3, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}=10, \\ xy=99; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y=5, \\ (x-y)(x^2-y^2)=45; \end{cases}$

10) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1, \\ \frac{x-2}{y-3}=1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8}, \\ x+y=12; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{x+3}{y-4}-\frac{x-1}{y+4}+\frac{16}{y^2-16}=0, \\ 11x-3y=1. \end{cases}$

45. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=68, \\ xy=16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=-10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=49, \\ xy=6; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x^2-xy=6, \\ y^2-xy=-2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10; \end{cases}$
8) $\begin{cases} x^2-xy=28, \\ y^2-xy=-12; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}a^2, \\ xy=\frac{1}{2}a^2; \end{cases}$
10) $\begin{cases} x^2+y^2=2(a^2+b^2), \\ xy=a^2-b^2. \end{cases}$

46. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6}, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2{,}5, \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$
4) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+6\frac{x-y}{x+y}=5, \\ xy=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}, \\ x^2+y^2=45; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2xy-3\frac{x}{y}=15, \\ xy+\frac{x}{y}=15; \end{cases}$
8) $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=\frac{16}{3}, \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{9}{2}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy(x^2+y^2)=300, \\ xy+x^2+y^2=37; \end{cases}$
10) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}, \\ x+y=10; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{41}{20}; \\ x+y=41; \end{cases}$
12) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}=2, \\ x+y=2. \end{cases}$

47. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^3+y^3=72, \\ x^2-xy+y^2=12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3-y^3=133, \\ x-y=7; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x^3+y^3=\frac{9}{8}a^3, \\ x+y=\frac{3}{2}a; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^3-y^3=218, \\ x^2+xy+y^2=109. \end{cases}$

48. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ 2(x+y)^2-y^2=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5, \\ y^2-2xy+2x^2=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, \\ 5x^2-2xy-y^2=5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2-3xy+4y^2=24, \\ 2y^2-3xy+4x^2=48; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-5xy+y^2=-47, \\ xy=21; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3y^2-2xy=160, \\ y^2-3xy-2x^2=8; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$

3.17. Atsakymai

3. 1) 6; 2) 9; 3) 8; 4) $1\frac{1}{5}$; 5) 14; 6) -3; 7) 2; 8) 4; 9) 4; 10) 3. **4.** 1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 2; 5) 3; 6) 5; 7) 1; 8) -1; 9) 4; 10) 5; 11) $\varnothing$; 12) $\varnothing$. **6.** 1) 32, 28, 35; 2) 8; 3) 80 km/h; 4) 150. **13.** 1) (8, 9); 2) (4, 4); 3) (36, 12); 4) $(-2, 5)$; 5) $(4, -3)$; 6) (5, 8). **15.** 1) (8, 4); 2) (4, 2); 3) (4, 2); 4) (7, 4). **16.** 1) (1, 2, 3); 2) (1, 2, 3); 3) (2, 3, 4); 4) $(7, 5, -3)$; 5) (4, 3, 2); 6) (3, 5, 4); 7) (5, 3, 1); 8) (6, 2, 5); 9) (0, 0, 0); 10) Be galo daug sprendinių; 11) (1, 2, 3, 4); 12) (1, 2, 3, 4); 13) (1, 2, 3, 4); 14) (1, 2, 3, 4). **17.** 1) $x\in(-\infty, 3)$; 2) $x\in[-2, +\infty)$; 3) $x\in R$; 4) $x\in[1\frac{7}{4}, +\infty)$; 5) $x\in(-\infty, \frac{2}{13})$; 6) $x\in(-\infty, 3{,}5]$; 7) $x\in(-\frac{1}{4}, +\infty)$; 8) $x\in(-\infty, 5]$; 9) $x\in(-\infty, -4]$; 10) $x\in(-\infty, 0)$. **18.** 1) $x\in(4, +\infty)$; 2) $x\in(-\infty, -6)$; 3) $x\in[1, 3)$; 4) $\varnothing$; 5) $x\in(1, 1{,}5)$. **19.** 1) $x\in(2, 7)$; 2) $y\in(-\infty, 4)\cup(5, +\infty)$; 3) $a\in(-\infty, \frac{1}{3}]\cup[2, +\infty)$; 4) $b\in(-7, -3)$; 5) $z\in[1, 1{,}5]$; 6) $x\notin(-\infty, -10)\cup(8, +\infty)$; 7) $x\in(-\infty, 5{,}4]\cup[6, +\infty)$; 8) $x\in(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$; 9) $x\notin[3; 5]$; 10) $x\in(-\infty, -7)\cup(-5, +\infty)$; 11) $x\in[-5, 2]$. **20.** 1) $x\in(\frac{1}{3}, 2]$; 2) $x\in(-\infty, \frac{1}{2}]\cup(3, +\infty)$; 3) $x\in R$, $x\neq-2$; 4) $x\in(-\infty, -4]\cup[3, +\infty)$. **21.** 1) $x\notin[-2, 2]$; 2) $x\in(4\frac{1}{3}, 9)$; 3) $x\in[1, 5]$; 4) $x\in[6, +\infty)$; 5) $x\in(-\infty, 2\frac{4}{5})\cup(6, +\infty)$. **22.** 1) $x\in[-1, 5]$; 2) $x\in(-\infty, -8)\cup(2, +\infty)$; 3) $x\in(-1, 4)$; 4) $x\notin(-\infty, -5\frac{2}{3})\cup(1, +\infty)$; 5) $x\in(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$; 6) $x\in(2, +\infty)$; 7) $x\in(-\infty, 5)$; 8) $x\in(\frac{1}{2}, 1]$; 9) $x\notin(2, 4)\cup(4, 6)$; 10) $x\in(\frac{3}{4}, 1)\cup(1, +\infty)$; 11) $x\in(-\infty, -2)\cup(-1, +\infty)$; 12) $x\in(-5, -2)\cup(2, 3)\cup(3, 5)$. **25.** 7) 4; 8) 0, -2; 9) 13; 10) 5, -2; 11) $\varnothing$; 12) 6, $-2{,}2$; 13) -9; 14) $\varnothing$; 15) 1, $2\frac{2}{3}$. **26.** 1) 20 d. ir 30 d.; 2) 8 km/h ir 70 km/h; 3) 12 km/h; 4) 32 cm; 5) 10%. **31.** 1) $x=1$; 2) $\varnothing$; 3) $x\in[-\frac{2}{5}, 1]$; 4) $x\in R$; 5) $x\in R$, išskyrus 1,5; 6) $\varnothing$; 7) $x\in(-\infty, 2)\cup(1, +\infty)$; 8) $x\in(1, 2)\cup(3, +\infty)$; 9) $x\in(-\infty, -3)\cup(1, +\infty)$; 10) $x\in R$;

11) $x\in[2, 3]$; 12) $x\in(-\infty, 3)\cup(4, +\infty)$; 13) $x\in[2, 3]\cup(5, 6)$; 14) $(-5, 1)$, $x=3$; 15) $x\in(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$; 16) $x\in[-5, 1]\cup(2, 3)$; 17) $x\notin(-\infty, -3)\cup(-2, +\infty)$; 18) $a\in(-1, 2)$; 19) $x\in(-\infty, -1]\cup[2; 3]\cup[6, +\infty)$; 20) $x\in(-\infty, 1]\cup[2, 3]$. **34.** $z=1$. **35.** $z=18$. **36.** $z=10$. **37.** $z=4$. **41.** 1) $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$; 2) -3, -3, $-3\pm\sqrt{10}$; 3) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $2\pm\sqrt{5}$; 4) $-1\pm2\sqrt{2}$, -4, 2.

43. 1) 1; 2) 3; 3) 6; 4) 3, 18; 5) 5; 6) 1; 7) 9; 8) $\varnothing$; 9) 7, 8; 10) 2; 11) 2; 12) 6, 9; 13) 4; 14) 4; 15) 4; 16) 4, 5/3; 17) 4; 18) 0, 4; 19) 0, 2; 20) 0, 5/2; 21) 5; 22) 5; 23) 84, 19; 24) 1, $-2\frac{2}{3}$; 25) 0, -5. **44.** 5) (4, 2), (2, 4); 6) (3, 5), $(-3, -4)$; 7) (4, 2), $(-4, -2)$; 8) (11, 9), $(-11, -9)$; 9) (4, 1), (1, 4); 10) (3, 4), (1, 2); 11) (8, 4), (4, 8); 12) $\varnothing$. **45.** 1) $(-2, -4)$, $(-4, -2)$; (2, 4), (4, 2); 2) $(-2, -8)$, $(-8, -2)$, (2, 8) (8, 2); 3) $(-3, -5)$, $(-5, -3)$, (3, 5), (5, 3); 4) $(5, -2)$, $(-5, 2)$, $(-2, 5)$, $(2, -5)$; 5) (6, 1), (1, 6), $(-6, -1)$, $(-1, -6)$; 6) (3, 1), $(-3, -1)$; 7) (3, 2), $(-3, -2)$; 8) (7, 3), $(-7, -3)$; 9) $(a, \frac{1}{2}a)$, $(\frac{1}{2}a, a)$, $(-a, -\frac{1}{2}a)$, $(-\frac{1}{2}a, -a)$; 10) $(\pm(a+b), \pm(a-b))$, $(\pm(a-b), \pm(a-b), \pm(a+b))$. **46.** 1) (2, 3), (3, 2), $(-2, -3)$, $(-3, -2)$; 2) $(-2, -1)$, (2, 1); 3) (3, 2), $(-3, -2)$; 4) $(\pm2, \pm1)$, $(\pm\sqrt{6}; \pm\frac{1}{3}\sqrt{6})$; 5) $(-6, -3)$, (6, 3); 6) (2, 1), (1, 2); 7) $(-6, -2)$, (6, 2); 8) $(-2, -3)$, (2, 3); 9) (4, 3), (3, 4), $(-4, -3)$, $(-3, -4)$; 10) (8, 2), (2, 8); 11) (25, 16); 12) $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$. **47.** 1) (2, 3), (3, 2); 2) (4, 2), (2, 4); 3) (2, 1), $(-1, -2)$; 4) $(-1, 2)$, $(2, -1)$; 5) $(5, -2)$, $(-2, 5)$: 6) $(a, \frac{a}{2})$, $(\frac{a}{2}, a)$; 7) (7, 5), $(-5, -7)$. **48.** 1) (1, 2), $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-1, -2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; 2) (1, 2), (2, 1), $(-1, -2)$, $(-2, -1)$; 3) $(-3, -2)$, (3, 2); 4) (1, 2), $(-1, -2)$, $\left(\frac{13}{\sqrt{138}}, \frac{5}{\sqrt{138}}\right)$, $\left(-\frac{13}{\sqrt{138}}, -\frac{5}{\sqrt{138}}\right)$.

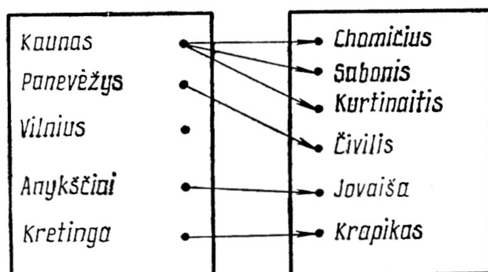
4. FUNKCIJOS. RIBOS. TOLYDUMAS

4.1. Funkcijos sąvoka. Funkcijos apibrėžimo ir kitimo sritys. Skaičių seka

Praktinėje veikloje susiduriame su įvairiausiais dydžiais, reiškiniais, procesais. Tuos procesus, reiškinius, jų dėsningumus galima aprašyti įvairiomis funkcijomis. Todėl funkcija — svarbi pasaulio pažinimo priemonė.

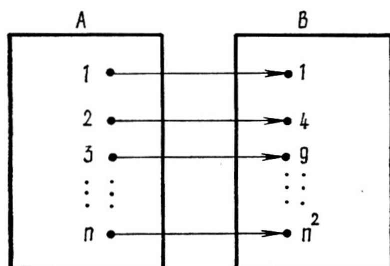
Devynmetės mokyklos matematikos kurse jūs jau susipažinote su funkcija, jos reiškimo būdais ir kai kuriomis konkrečiomis funkcijų rūšimis. Šiuos svarbius klausimus nagrinėsime išsamiau. Pateiksime keletą pavyzdžių, glaudžiai susijusių su funkcijos sąvoka.

Pavyzdžiai. 1. Įvairiuose mūsų respublikos rajonuose ir miestuose rengiami kandidatai į Kauno „Žalgirio“ krepšinio komandą. Taigi yra atitiktis tarp Lietuvos rajonų, miestų ir atskirų „Žalgirio“ komandos krepšininkų. Ši atitiktis pavaizduota 69 paveiksle.

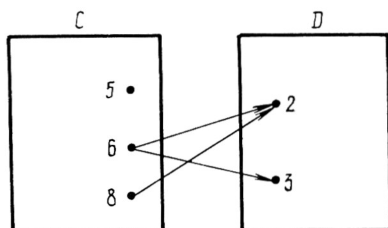


69 pav.

2. Imkime kvadratų, kurių kraštinių ilgiai yra natūriniai skaičiai 1, 2, 3, ..., n, ..., aibę A ir jų plotų aibę B, t. y. $B=1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ Tam tikro ilgio kraštinę atitinka vienas skaičius — kvadrato plotas. Ši atitiktis pavaizduota 70 paveiksle.



70 pav.



71 pav.

3. Duotos dvi skaičių aibės: $C=5, 6, 8$ ir $D=2, 3$. Tuo atveju, kai aibės D elementai yra aibės C elementų dalikliai, sakome, kad tarp tų elementų nustatyta atitiktis (žr. 71 pav.). Skaičius 5 neturi jį atitinkančio skaičiaus aibėje D.

4. Tarkime, kad visų trikampių aibė plokštumoje yra M, o visų apskritimų aibė toje pačioje plokštumoje yra N. Kiekvieną trikampį atitinka į jį įbrėžtas apskritimas. Taigi šiuo atveju kiekvieną aibės M elementą atitinka tik vienas aibės N elementas.

Apibrėžimas. *Atitiktis tarp aibių M ir N yra funkcija, jeigu kiekvieną aibės M elementą atitinka tiktai vienas aibės N elementas.*

Aibių M ir N elementai gali būti įvairūs dydžiai, geometrinės figūros, žmonės ir kt. Aibė M vadinama funkcijos *apibrėžimo sritimi,* o aibė N — funkcijos *kitimo sritimi.*

2 ir **4** pavyzdžiuose aprašytos atitiktys yra funkcijos.

Susipažinkime su vidurinėse mokyklose ir technikumuose nagrinėjamomis skaitinėmis funkcijomis.

Imkime dvi realiųjų skaičių aibes X ir Y. Tų aibių elementus žymėkime atitinkamai x ir y.

Apibrėžimas. *Atitiktis, kurioje kiekvieną aibės X elementą x atitinka tik vienas aibės Y elementas y, vadinama skaitine funkcija.*

Šioje atitiktyje x vadinamas nepriklausomu kintamuoju, arba *argumentu*, o y — priklausomu kintamuoju, arba *funkcija*, kuri užrašoma šitaip:

$$y=f(x);$$

čia raide f pažymėta taisyklė, pagal kurią apskaičiuojamas y paėmus konkrečią x reikšmę.

Aibė X vadinama funkcijos f *apibrėžimo sritimi*, o aibė Y — jos *kitimo sritimi*.

4.1.1. Funkcijos reiškimo būdai. 1. Dažniausiai funkcija reiškiama analiziškai, t. y. formule. Pavyzdžiui, funkcija

$$y=\frac{4}{x-2}$$

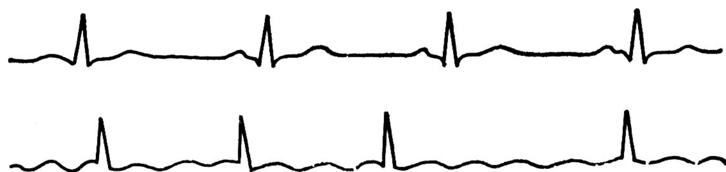
išreikšta analiziškai. Pagal šią formulę, imdami argumento x reikšmes ir atlikdami nurodytus veiksmus, galime gauti y reikšmes. Pavyzdžiui, kai $x=4$, tai $y=2$.

2. Funkcija gali būti pateikta lentele, kurioje surašytos jos reikšmės, atitinkančios įvairias argumento reikšmes. Pavyzdžiui:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

Šia lentele apibrėžtą funkciją galima užrašyti formule $y=x^2$. Čia $X=\{1, 1{,}1, 1{,}2, \ldots, 2\}$ yra funkcijos apibrėžimo sritis, o $Y=\{1, 1{,}21, 1{,}44, \ldots, 4\}$ — jos kitimo sritis.

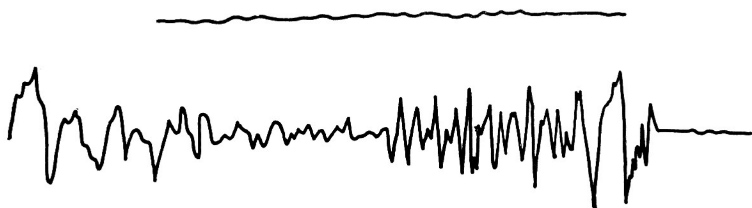
3. Praktikoje įvairios funkcijos dažnai reiškiamos grafiškai. Šis funkcijų reiškimo būdas patogus tuomet, kai sunku arba neįmanoma jų išreikšti analiziškai. Kai kuriuos procesus (funkcijas) įvairūs



72 pav.

prietaisai vaizduoja grafiškai. Iš grafikų galima spręsti apie tų procesų kitimą, jų savybes. 72 paveiksle pateiktos dvi kardiogramos. Viršutinė vaizduoja normalios širdies darbą, apatinė — ligotos.

73 paveiksle matome dvi kreives, kurias nubrėžė seismografas — prietaisas žemės plutos svyravimams registruoti. Viršutinė kreivė rodo, kad žemės pluta rami, apatinėje matomi žemės drebėjimo signalai.



73 pav.

Oscilografo ekrane galime stebėti įvairių elektrinių procesų grafinį vaizdą, iš kurio sprendžiame apie tų procesų savybes.

4. Funkcija gali būti aprašyta žodžiais. Pavyzdžiui, funkcija yra sveikoji skaičiaus x dalis, t. y. $f(x)=[x]=n$ su visomis x reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybę $n \leqslant x \leqslant n+1$, $n \in N$. Simbolis [ ] reiškia skaičiaus sveikąją dalį.

4.1.2. Funkcijos apibrėžimo ir kitimo sritys.

Apibrėžimas. *Skaitinės funkcijos apibrėžimo sritis yra jos argumento leistinųjų reikšmių aibė, jeigu ta sritis nėra kaip nors kitaip nusakyta.*

Apibrėžimo sritį simboliškai žymime $D(f)$, $D(\varphi)$, $D(g)$ ir pan., kai atitikties taisyklės yra $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$ ir t. t.

Pavyzdžiai. 1. Nustatysime funkcijos

$$f(x)=\sqrt{x^2-16}$$

apibrėžimo sritį.

Kadangi realiųjų skaičių aibėje kvadratinė šaknis yra traukiama tik iš neneigiamų skaičių, tai

$$x^2-16 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow |x| \geqslant 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty).$$

2. Rasime funkcijos

$$g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

apibrėžimo sritį.

Funkcija $g(x)$ yra apibrėžta, kai:

1) pošaknis yra neneigiamas,

2) vardiklis nelygus nuliui.

Taigi funkcijos apibrėžimo sritis yra

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, 2) \cup (2, +\infty).$$

y reikšmių aibė, kai x įgyja visas reikšmes iš apibrėžimo srities, vadinama funkcijos kitimo sritimi.

Funkcijos kitimo sritį simboliškai žymėsime $E(f)$, $E(\varphi)$, $E(g)$ ir pan.

Pavyzdžiai. 1. Funkcijos $y=\sqrt{x}$ kitimo sritis yra $[0, +\infty)$, nes aritmetinė šaknis iš neneigiamo skaičiaus yra neneigiamas skaičius.

2. Funkcijos $g(z)=2z+1$ kitimo sritis yra R, nes, kai $x \in R$, reiškinys $2z+1$ įgyja bet kokias realias skaitines reikšmes.

3. Funkcijos $f(x)=\frac{1}{x}$ kitimo sritis yra visi realieji skaičiai, iš skyrus nulį, t. y. $f(x) \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

4. Funkcijos $y=x^2$, kai $x \in [1, 3]$, kitimo sritis yra $y \in [1, 9]$.

4.2. Skaičių sekos sąvoka

Apibrėžimas. *Skaičių seka yra natūrinio argumento funkcija.* Taigi

$$y=f(x)$$

yra skaičių seka, kai $x \in N$. Tokios sekos narius iki bet kurio nario užrašome šitaip: $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$

Skaičių sekų nariai paprastai žymimi raide a su indeksu, kuris reiškia tos sekos nario numerį:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots;$$

čia a_n — bendrasis sekos narys: $a_n=f(n)$.

Parašykime skaičių seką, kurios

$$a_n=\frac{3n+2}{n+1}.$$

Apskaičiuokime keletą pirmųjų šios sekos narių vietoje n imdami iš eilės einančius natūrinius skaičius:

$$a_1=\frac{3\cdot1+2}{1+1}=\frac{5}{2}, \qquad a_2=\frac{3\cdot2+2}{2+1}=\frac{8}{3},$$

$$a_3=\frac{3\cdot3+2}{3+1}=\frac{11}{4}, \qquad a_4=\frac{3\cdot4+2}{4+1}=\frac{14}{5} \text{ ir t. t.}$$

Užrašome kelis sekos narius:

$$\frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \ldots, a_n=\frac{3n+2}{n+1}.$$

Iš geometrijos žinome, kad iškiliojo daugiakampio, turinčio n kraštinių, vidaus kampų suma randama iš formulės

$$S_n=2d(n-2);$$

čia n — kraštinių skaičius, $d=90°$. Kai $n=3, 4, 5, 6, \ldots$, gauname

$$S_n=2d, 4d, 6d, 8d, \ldots$$

Pateikiame keletą skaičių sekų pavyzdžių:

1. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots;\ a_n=n;$

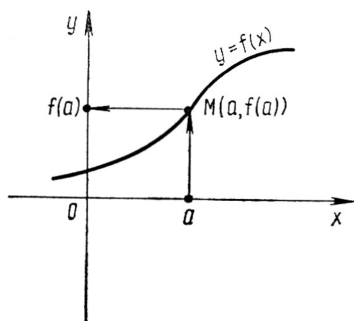
2. $2, 4, 6, \ldots;\ a_n=2n;$

3. $4, 8, 12, \ldots;\ a_n=4n;$

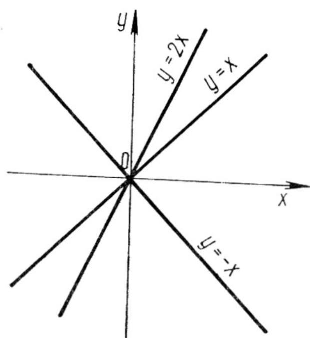
4. 1, 3, 5, ... ; $a_n=2n-1$;
5. 3, 5, 7, ... ; $a_n=2n+1$;
6. 4, 9, 14, ... ; $a_n=5n-1$;
7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots ; a_n=\frac{1}{n}$;
8. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots ; a_n=\frac{n+1}{n+2}$;
9. $-1, +1, -1, \ldots ; a_n=(-1)^n$;
10. $1, 4, 9, \ldots ; a_n=n^2$;
11. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots ; a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4.3. Funkcijos grafikas. Paprasčiausios grafikų transformacijos

4.3.1. Funkcijos grafikas. Funkcijos $y=f(x)$ grafiku vadiname aibę visų koordinačių plokštumos taškų, kurių abscisės yra argumento x reikšmės, o ordinatės — funkcijos $f(x)$ atitinkamos reikšmės Taigi aibė taškų $(x, f(x))$ vadinama funkcijos y grafiku. 74 paveiksle pateiktas funkcijos $y=f(x)$ grafikas. Šio grafiko taško M koordinatės yra $(a, f(a))$. Norint nubrėžti funkcijos $y=f(x)$ gra-



74 pav.



75 pav.

fiką, reikia pažymėti koordinačių plokštumoje visus taškus, kurių koordinatės tenkina lygybę $y=f(x)$. Bet tai padaryti ne visuomet galima.

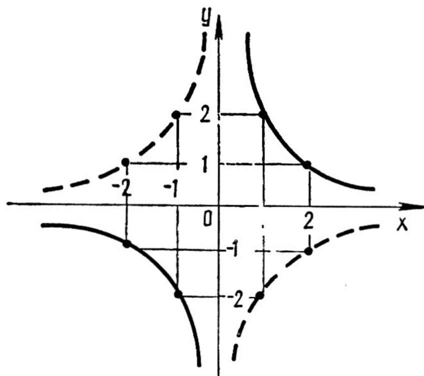
Funkcijos grafiką dažniausiai braižome apytiksliai, remdamiesi tos funkcijos savybėmis sujungiame keletą pažymėtų taškų.

Devynmetės mokyklos matematikos kurse esate nagrinėję kai kurių funkcijų grafikus. Trumpai juos priminsime.

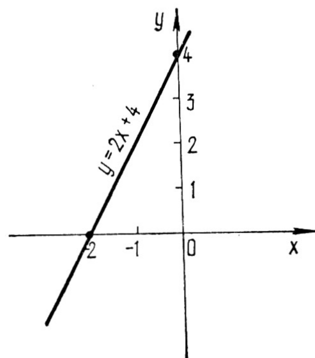
1. Funkcija $y=kx$ vadinama *tiesioginiu proporcingumu.* Jos grafikas yra tiesė, einanti per koordinačių pradžią; jos kryptis priklauso nuo koeficiento $k \in R$. 75 paveiksle matome funkcijos $y=2x$ grafiką

($k=2$). Funkcijų $y=x$ ir $y=-x$ grafikai yra pirmojo ir trečiojo bei antrojo ir ketvirtojo ketvirčių pusiaukampinės.

2. Funkcija $y=\frac{k}{x}$ vadinama *atvirkščiuoju proporcingumu*. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė be skaičiaus 0. 76 paveiksle pateiktas funkcijos $y=\frac{2}{x}$ grafikas (brūkšnine linija — funkcijos $y=-\frac{2}{x}$ grafikas). Kai $k>0$, funkcijos $y=\frac{k}{x}$ grafikas yra pirmajame ir trečiajame ketvirčiuose, kai $k<0$ — antrajame



76 pav.



77 pav.

ir ketvirtajame ketvirčiuose. Atvirkščiojo proporcingumo grafikas yra hiperbolė.

3. Funkcija $y=kx+b$ vadinama *tiesine*. Jos grafikas — tiesė. Tiesioginio proporcingumo funkcija $y=kx$ yra atskiras tiesinės funkcijos atvejis, kai $b=0$ ir $k\neq 0$. Tiesinės funkcijos grafiką — tiesę galima brėžti per tos tiesės ir koordinačių ašių susikirtimo taškus. 77 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=2x+4$ grafikas.

4. Iš mokyklinės matematikos kurso žinote funkcijas $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$, $y=x^3$ ir kt. Jų grafikai pavaizduoti 78 paveiksle.

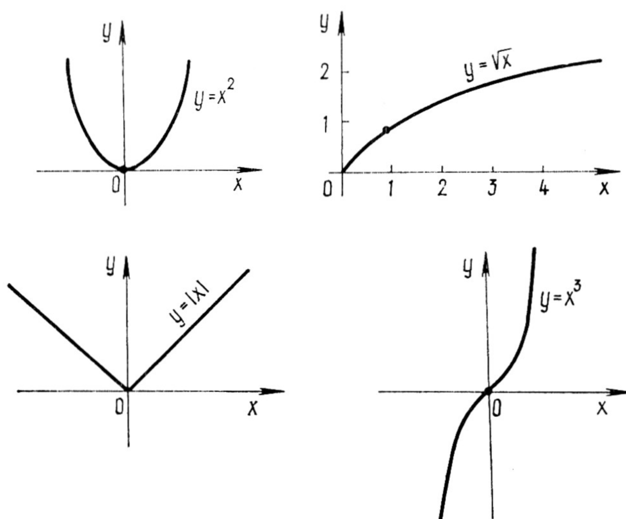
5. 79 paveiksle pateiktas funkcijos

$$y=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 2, \\ \frac{1}{2}x, & x>2 \end{cases}$$

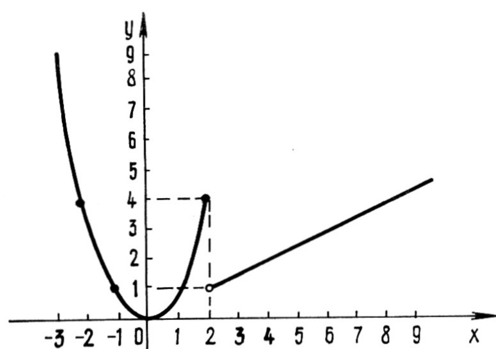
grafikas. Kaip matome, jis susideda iš dviejų dalių. Atkreipkite dėmesį: paveiksle pilnaviduris taškas priklauso grafikui, o tuščiaviduris taškas grafikui nepriklauso.

Užrašykite funkciją, kurios grafikas pavaizduotas 80 paveiksle.

4.3.2. Paprasčiausios funkcijų grafikų transformacijos. Imkime tiesinę funkciją $y=kx+b$. Šios funkcijos grafikas gaunamas iš funkcijos $y=kx$ grafiko, pastūmus jį išilgai Oy ašies per b vienetų. Pos-



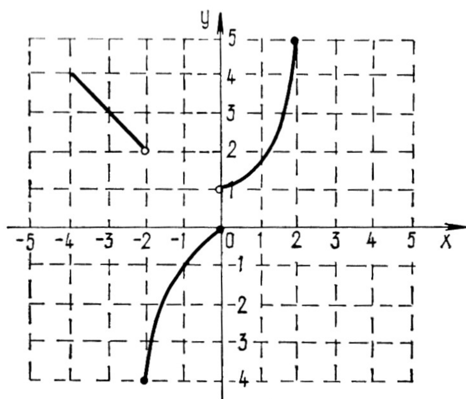
78 pav.



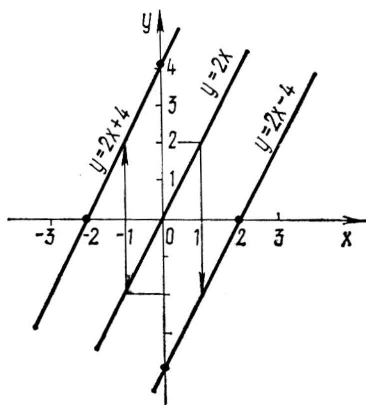
79 pav.

tūmio kryptį rodo skaičiaus b ženklas. Kai $b>0$, grafikas stumiamas aukštyn, kai $b<0$ — žemyn. 81 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=2x$ grafiko postūmis 4 ilgio vienetais į viršų ($y=2x+4$) ir į apačią ($y=2x-4$).

Stumdami funkcijos $y=2x$ grafiką į viršų ašies Oy atžvilgiu per 4 ilgio vienetus, atliekame jo lygiagretų postūmį į kairę ašies Ox atžvilgiu per 2 ilgio vienetus. Stumdami funkcijos $y=2x$ grafiką žemyn ašies Oy atžvilgiu per 4 ilgio vienetus, kartu jį stumiame lygiagrečiai į dešinę ašies Ox atžvilgiu per 2 ilgio vienetus (žr. 81 pav.). Apskritai, atlikdami funkcijos $y=kx+b$ grafiko lygiagretų postūmį ašies Oy atžvilgiu, kartu atliekame ir šio grafiko postūmį



80 pav.

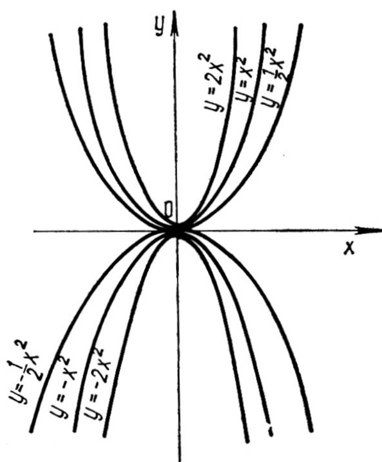


81 pav.

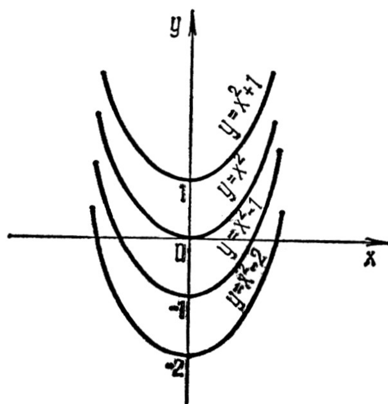
dydžiu $\frac{b}{k}$ į kairę arba į dešinę ašies Ox atžvilgiu. Ši savybė būdinga tik tiesinėms funkcijoms.

Nagrinėkime kvadratinės funkcijos grafiko transformacijas.

1. Funkcijos $y=ax^2$ grafiką — parabolę galima gauti iš funkcijos $y=x^2$ grafiko — parabolės, padauginus visų jos taškų ordinates iš a ir palikus tas pačias abscises. 82 paveiksle nubrėžti funkcijų $y=2x^2$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ grafikai. Matome, kad, kai $a>0$, parabolių šakos kyla į viršų, o kai $a<0$ — leidžiasi žemyn. Be to, didėjant koeficiento a moduliui, parabolių šakos artėja prie y ašies, o jam mažėjant — prie x ašies.



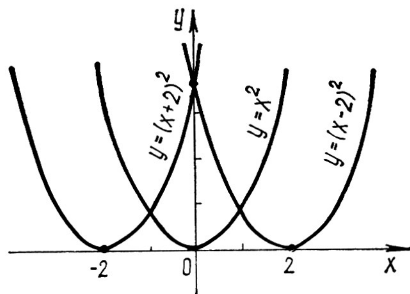
82 pav.



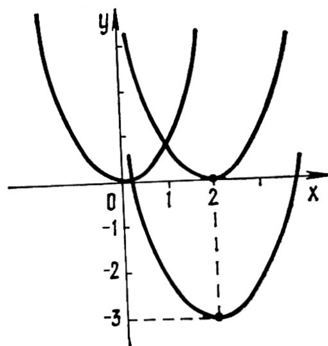
83 pav.

2. Funkcijos $y=ax^2+c$ grafikas yra tokia pati parabolė kaip ir funkcijos $y=ax^2$ grafikas, tik pakilusi į viršų per c ilgio vienetų, kai $c>0$, arba nusileidusi žemyn per c ilgio vienetų, kai $c<0$ (žr. 83 pav.). 83 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y=x^2+1$, $y=x^2$, $y=x^2-1$, $y=x^2-2$ grafikai. Čia visų funkcijų $a>0$ $(a=1)$, todėl parabolių šakos nukreiptos į viršų. Kai $a<0$, parabolių šakos nukreiptos žemyn.

3. Nagrinėsime funkciją $y=(x-m)^2$. Pastumiame funkcijos $y=x^2$ grafiką — parabolę per 2 ilgio vienetus į dešinę (84 pav.). Po



84 pav.



85 pav.

šios transformacijos parabolės kiekvieno taško abscisė padidės 2 ilgio vienetais, o ordinatė nepasikeis. Vadinasi, parabolės taškas (x, y) pereina į tašką (x', y'); čia $x'=x+2$, $y'=y$. Lygybėje $y=x^2$ vietoje y įrašę y', o vietoje x įrašę $x'-2$, gauname $y'=(x'-2)^2$. Iš čia išplaukia, kad naujoje padėtyje parabolės lygtis yra $y=(x-2)^2$. Panašiai pastūmę parabolę $y=x^2$ į kairę per 2 ilgio vienetus gauname parabolę $y=(x+2)^2$ (84 pav.).

Iš šių pavyzdžių aišku, kad funkcijos $y=(x-m)^2$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y=x^2$ grafiko, pastūmus jį išilgai ašies Ox per $|m|$ ilgio vienetų į dešinę, kai $m>0$, ir į kairę, kai $m<0$.

4. Imkime funkciją $y=a(x-m)^2+n$. Jos grafiką — parabolę gausime šitaip:

1) parabolę $y=ax^2$ pastumsime išilgai ašies Ox dydžiu $|m|$ ir gausime parabolę $y=a(x-m)^2$;

2) parabolę $y=a(x-m)^2$ pastumsime dydžiu $|n|$ į viršų, jei $n>0$, arba žemyn, jei $n<0$. 85 paveiksle parodyta, kaip parabolė $y=x^2$ pastumta išilgai ašies Ox į dešinę per 2 ilgio vienetus ir gautas funkcijos $y=(x-2)^2$ grafikas. Po to parabolė $y=(x-2)^2$ nuleista žemyn per 3 ilgio vienetus ir gautas funkcijos $y=(x-2)^2-3$ grafikas. Apskritai funkcijos $y=a(x-m)^2+n$ grafikas yra parabolė, kurios simetrijos ašis yra tiesė $x=m$, lygiagreti ašiai Oy, o viršūnė — taškas $A(m, n)$.

5. Nagrinėkime funkciją $y=ax^2+bx+c$.
Šią kvadratinę funkciją pertvarkome šitaip:

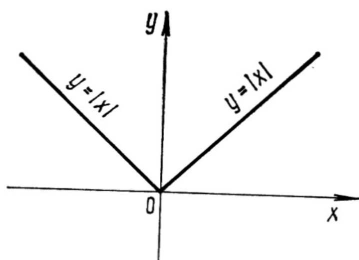
$$y=a\left(x^2+\frac{2b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2b\cdot\frac{x}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

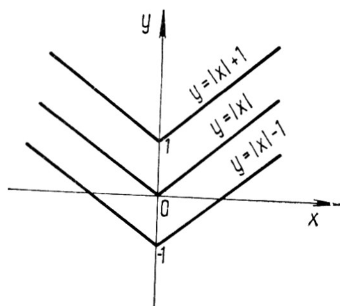
Matome, kad funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiką galima gauti pastūmus parabolę $y=ax^2$ per $-\frac{b}{2a}$ vienetų abscisių ašies kryptimi ir po to gautąjį grafiką pastūmus per $\frac{4ac-b^2}{4a}$ vienetų ordinačių ašies kryptimi. Po šių pertvarkių gausime parabolę, kurios viršūnė bus taškas $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, o simetrijos ašis — tiesė $y=-\frac{b}{2a}$, lygiagreti ašiai Oy. Parabolės šakos nukreiptos į viršų, jei $a>0$, ir žemyn, jei $a<0$.

6. Imkime funkciją $y=|x|$, arba $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

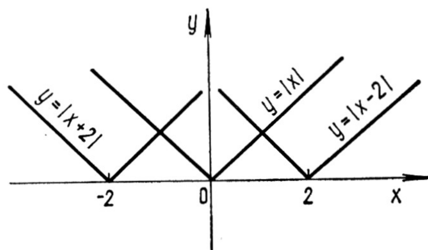
Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 86 paveiksle. Naudodamiesi tuo grafiku, galime gauti funkcijų $y=|x|+1$, $y=|x|-1$ grafikus. Funkcijos $y=|x|+1$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y=|x|$ grafiko, pastūmus jį išilgai ašies Oy į viršų per 1 ilgio vienetą. Funkcijos



86 pav.



87 pav.



88 pav.

$y=|x|-1$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y=|x|$ grafiko, pastūmus jį išilgai ašies Oy žemyn per 1 ilgio vienetą (žr. 87 pav.). Funkcijų $y=|x+2|$ ir $y=|x-2|$ grafikus gauname iš funkcijos $y=|x|$ grafiko, stumdami pastarąjį išilgai ašies Ox (88 pav.). Kaip matome, funkcijos $y=|x|$ grafiko postūmis išilgai ašies Ox yra analogiškas funkcijos $y=x^2$ grafiko postūmiui.

4.4. Argumento ir funkcijos pokyčiai

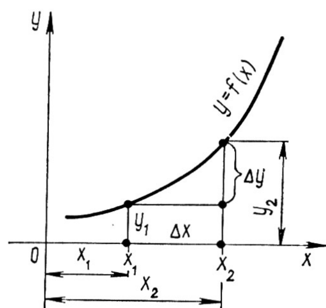
Imkime funkciją $y=f(x)$ ir bet kurias dvi argumento reikšmes x_1 ir x_2. Skirtumas x_2-x_1 vadinamas argumento pokyčiu taške x_1 ir žymimas Δx. Taigi

$$\Delta x=x_2-x_1.$$

Argumento pokytis gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas skaičius. Pavyzdžiui, jeigu argumentas pasikeičia nuo 2 iki 2,08, tai $\Delta x=$ $=2{,}08-2=0{,}08$. Tačiau, jeigu argumentas pasikeičia nuo 5 iki 4,8, tai $\Delta x=4{,}8-5=-0{,}2$.

Sakykime, argumento reikšmes x_1 ir x_2 atitinka funkcijos reikšmės y_1 ir y_2. Skirtumas tarp antrosios ir pirmosios funkcijų reikšmių vadinamas funkcijos *pokyčiu* taške x_1 ir žymimas simboliu Δy (skaitomas *delta ygrek*). Taigi $\Delta y=y_2-y_1$.

Funkcijos ir argumento pokyčiai parodyti 89 paveiksle. Jame pastebime, kad argumento pokytis yra abscisių skirtumas, o funkcijos pokytis — ordinačių skirtumas.



89 pav.

Imkime funkciją $y=f(x)$. Jeigu argumentui x suteikiame pokytį Δx, tai funkcija įgyja pokytį Δy. Naują argumento reikšmę $x+\Delta x$ atitiks nauja funkcijos reikšmė

$$f(x+\Delta x).$$

Taigi $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Išvada. *Funkcijos pokytis lygus pakitusios ir pradinės jos reikšmių skirtumui.*

Pavyzdžiai. 1. Rasime funkcijos $y=x^2+1$ pokytį, kai $x_1=2$, $x_2=3$.

$$y_1=2^2+1=4+1=5;$$
$$y_2=3^2+1=9+1=10;$$
$$\Delta y=y_2-y_1=10-5=5.$$

2. Apskaičiuokime funkcijos $y=\frac{1}{x}$ pokytį, kai $x_1=-4$, $x_2=-3$.

$$y_1=-\frac{1}{4},\quad y_2=-\frac{1}{3};$$

$$\Delta y=-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}.$$

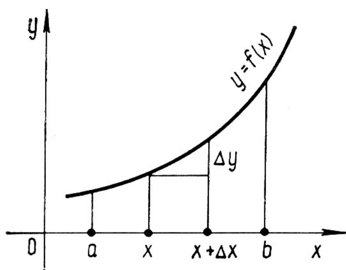
3. Raskime funkcijos $y=2x^2-3x+5$ pokytį taške x, atitinkantį argumento pokytį Δx.

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+5-(2x^2-3x+5)=2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2-$$
$$-3x-3\Delta x+5-2x^2+3x-5=4x\Delta x+2(\Delta x)^2-3\Delta x.$$

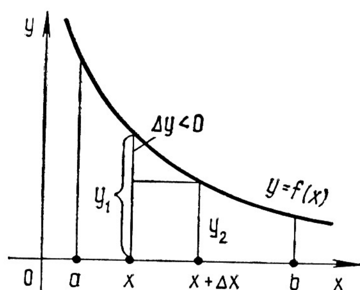
4.5. Funkcijų monotoniškumas

Apibrėžimas. *Funkciją $y=f(x)$ intervale $x\in(a, b)$ vadiname didėjančia, jeigu didėjant argumento reikšmėms funkcijos reikšmės didėja, t. y. jeigu $x_2>x_1$, tai $f(x_2)>f(x_1)$.*

Funkcijos kitimą vaizdžiai rodo jos grafikas (žr. 90 pav.). Jeigu didėjant x grafikas (tiesė arba kreivė) nurodytajame intervale kyla į viršų, stebint jį iš kairės į dešinę, tai funkcija yra didėjanti. Didėjančios funkcijos pokytis Δy yra to paties ženklo kaip ir argumento pokytis Δx.



90 pav.

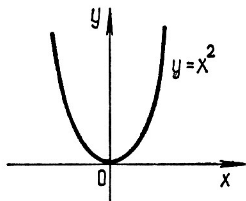


91 pav.

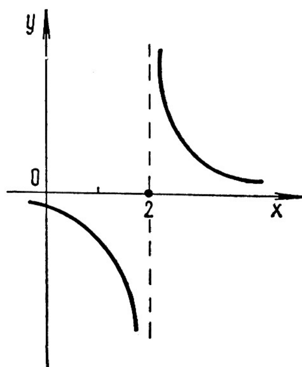
Apibrėžimas. *Funkciją $y=f(x)$ intervale $x\in(a, b)$ vadiname mažėjančia, jeigu didėjant argumento reikšmėms funkcijos reikšmės mažėja, t. y. jeigu $x_2>x_1$, tai $f(x_2)<f(x_1)$.* Mažėjančios funkcijos grafikas nurodytajame intervale (žr. 91 pav.) leidžiasi žemyn, stebint jį iš kairės į dešinę. Kai funkcija yra mažėjanti, jos pokytis ir argumento pokytis yra priešingų ženklų.

Apibrėžimas. *Jeigu funkcija $y=f(x)$ intervale $x \in (a, b)$ yra didėjanti arba mažėjanti, tai ji vadinama monotonine tame intervale, o intervalas (a, b) vadinamas funkcijos $y=f(x)$ monotoniškumo intervalu.*

Pavyzdžiai. 1. Nustatysime funkcijos $y=x^2$ monotoniškumo intervalus. Kai $x=0$, tai ir $y=0$. Funkcijos y grafikas (parabolė) liečia



92 pav.



93 pav.

ašį Ox taške $x=0$. Šis taškas dalija visą ašį Ox (realiųjų skaičių aibę) į du intervalus:

$$(-\infty, 0], \quad [0, +\infty).$$

92 paveiksle matome, kad intervale $(-\infty, 0]$ funkcija mažėja, intervale $[0, +\infty)$ — didėja. Taigi šie intervalai ir yra funkcijos $y=x^2$ monotoniškumo intervalai.

2. Raskime funkcijos $y=\frac{1}{x-2}$ monotoniškumo intervalus. Ši funkcija yra apibrėžta, kai $x \neq 2$. Be to, $\frac{1}{x-2} > 0$, kai $x-2>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x>2$; $\frac{1}{x-2} < 0$, kai $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$. Didėjant x reikšmėms, t. y. kai $x \rightarrow \infty$, funkcija mažėja. Pavyzdžiui, kai $x=3$, $y=1$; kai $x=4$, $y=\frac{1}{2}$ ir t. t. Taigi funkcija $y=\frac{1}{x-2}$ yra mažėjanti visoje apibrėžimo srityje. Tai matome ir 93 paveiksle.

Išvada. *Funkcija $y=\frac{1}{x-2}$ yra monotoninė intervaluose $(-\infty, 2)$ ir $(2, +\infty)$.*

4.6. Aprėžtosios ir neaprėžtosios funkcijos

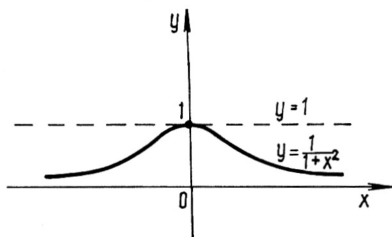
Apibrėžimas. *Funkcija* $y=f(x)$ *vadinama aprėžta intervale* $x\in[a, b]$, *jeigu egzistuoja tokie skaičiai m ir M, kad su visomis x reikšmėmis iš to intervalo galioja nelygybės*

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

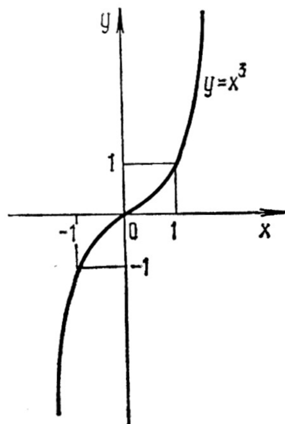
Aprėžtosios funkcijos kitimo sritis yra baigtinis intervalas. Pavyzdžiui, funkcija

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

yra aprėžta. Iš tikrųjų, kai x reikšmės neribotai didėja, trupmena mažėja, tačiau nuliu tapti negali. Kita vertus, minėtoji trupmena yra didžiausia tuomet, kai vardiklis mažiausias, t. y. kai $x=0$. Tuo atveju $y=1$. Taigi funkcija yra aprėžta dviejų skaičių 0 ir 1. 94 paveiksle matome tos funkcijos grafiką, esantį tarp ašies Ox ir jai lygiagrečios tiesės $y=1$.



94 pav.



95 pav.

Įsitikinkite, kad funkcijos $y=x^2$, kai $x\in[1, 3]$, ir $y=(-1)^n$, kai $n\in N$, yra aprėžtos.

Jeigu argumentui kintant tam tikrame intervale funkcijos reikšmės moduliu gali būti didesnės už bet kokį teigiamąjį skaičių, tai funkcija vadinama *neaprėžta* tame intervale.

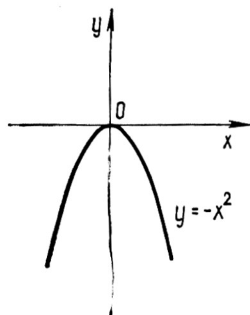
Funkcija, būdama neaprėžta kuriame nors intervale, kitame intervale gali būti aprėžta. Pavyzdžiui, funkcija $y=2x+4$ visų realiųjų skaičių aibėje yra neaprėžta, tačiau intervale [1, 3] jos reikšmės mažesnės arba lygios 10 ir didesnės arba lygios 6, t. y.

$$y\in[6, 10].$$

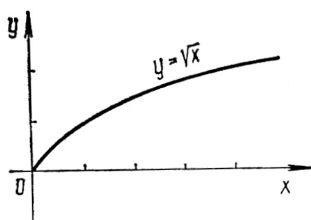
Funkcija $y=x^3$ savo apibrėžimo srityje yra neaprėžta, nes didėjant x reikšmėms y neribotai didėja, o mažėjant x reikšmėms y neribotai mažėja. Tai matome ir 95 paveiksle.

Apibrėžimas. *Jeigu funkcijos $y=f(x)$ reikšmės jos kitimo srityje ne didesnės už kokį nors skaičių M, t. y. $f(x) \leqslant M$, tai ta funkcija yra aprėžta iš viršaus.*

Pavyzdys. Funkcija $y=-x^2$ yra aprėžta iš viršaus, nes jos kitimo sritis yra pusatviris intervalas $y \in (-\infty, 0]$. Iš tikrųjų, funkcija $y=-x^2$ yra lygi arba mažesnė už nulį. Nulis — pati didžiausia šios



96 pav.



97 pav.

funkcijos reikšmė, kuri gaunama paėmus $x=0$. Su kitomis x reikšmėmis funkcija neigiama. 96 paveiksle matome, kad funkcija $y=-x^2$ yra aprėžta iš viršaus, nes jos reikšmės ne didesnės už 0.

Apibrėžimas. *Jeigu funkcijos $y=f(x)$ reikšmės jos kitimo srityje ne mažesnės už kokį nors skaičių m, t. y. $f(x) \geqslant m$, tai ta funkcija yra aprėžta iš apačios.*

Pavyzdys. Funkcija $y=\sqrt{x}$ aprėžta iš apačios, nes jos mažiausia reikšmė yra 0, o visos kitos — didesnės už 0. Funkcija iš viršaus neaprėžta, nes x didėjant y neribotai didėja. Funkcijos $y=\sqrt{x}$ kitimo sritis — intervalas $[0, \infty)$ (žr. 97 pav.).

4.7. Funkcijų lyginumas

Skaičių aibė M yra simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu, jeigu kartu su kuriuo nors skaičiumi x joje yra ir jam priešingas skaičius $-x$. Pavyzdžiui, intervalas $[-5, 5]$ yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu, o intervalas $[-3, 6]$ — nesimetriškas. Intervalas $(-5, 5]$ nėra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu, nes $5 \in M$, o $-5 \not\subset M$.

Apibrėžimas. *Funkcija $y=f(x)$, kurios apibrėžimo sritis M yra simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu, vadinama lygine, jei su kiekvienu $x \in M$ galioja lygybė*

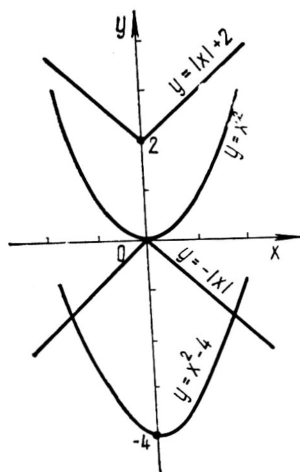
$$f(-x)=f(x).$$

Pavyzdžiui, funkcijos $y=x^2$, $y=x^2-4$, $y=-|x|$, $y=|x|+2$ yra lyginės, nes jų apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė, t. y.

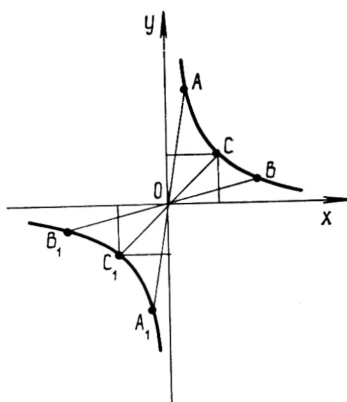
$x \in R$ (realiųjų skaičių aibė simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu); be to, visoms funkcijoms galioja lygybė

$$f(-x) = f(x).$$

Iš tikrųjų, jeigu $f(x) = x^2$, tai ir $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Jeigu $f(x) = |x| + 2$, tai ir $f(-x) = |-x| + 2 = |x| + 2$.



98 pav.



99 pav.

Lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių ašies *Oy* atžvilgiu. Tai matyti ir 98 paveiksle, kuriame nubrėžti minėtųjų funkcijų grafikai. Funkcija $y = \sqrt{4-x^2}$ yra lyginė, nes jos apibrėžimo sritis — intervalas $[-2, 2]$. Be to, $f(x) = \sqrt{4-x^2} = f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2}$.

Apibrėžimas. *Funkcija $y = f(x)$, kurios apibrėžimo sritis M yra simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu, vadinama nelygine, jei su kiekvienu $x \in M$ galioja lygybė*

$$f(-x) = -f(x).$$

Pavyzdžiui, funkcijos $y = x^3$, $y = 1/x$, $y = \sqrt[3]{x}$ yra nelyginės, nes jų apibrėžimo sritys $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ir $(-\infty, +\infty)$ simetriškos koordinačių pradžios taško atžvilgiu; be to, visoms toms funkcijoms galioja lygybė $f(-x) = -f(x)$. Iš tikrųjų, jeigu $f(x) = x^3$, tai $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$; jeigu $f(x) = \frac{1}{x}$, tai $f(-x) = -\frac{1}{x}$ ir jeigu $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tai $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

Įsitikinkite, kad funkcija $y = x^{2n+1}$ yra nelyginė, kai $n \in Z$.

Nelyginės funkcijos grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu. 99 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = 1/x$ grafikas. Kaip matome, grafiko taškus *A*, *B*, *C* atitinka jiems simetriški taškai

A_1, B_1, C_1 koordinačių pradžios taško atžvilgiu. Siūlome patiems nubrėžti funkcijų $y=x^3$ ir $y=\sqrt[3]{x}$ grafikus ir išsiaiškinti, ar jie simetriški koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Nereikia manyti, kad yra tik lyginės arba nelyginės funkcijos. Yra ir tokių funkcijų, kurios nepriklauso nei vienai, nei kitai grupei. Tai nei lyginės, nei nelyginės funkcijos.

Pavyzdžiui, funkcija $y=\sqrt{x}$ yra nei lyginė, nei nelyginė, nes jos apibrėžimo sritis $(x \geqslant 0)$ nėra simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Tiesinė funkcija $y=2x+3$ taip pat nei lyginė, nei nelyginė, nors jos apibrėžimo sritis $x \in R$ yra simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu, tačiau ji netenkina nė vienos iš lygybių $f(-x)=f(x)$ arba $f(-x)=-f(x)$. Įsitikinkite tuo patys.

4.8. Funkcijų periodiškumas

Gamtoje ir technikoje dažnai pasitaiko procesų, kurie periodiškai kartojasi. Pavyzdžiui, žinome, kad periodiškai viena kitą keičianti diena ir naktis yra Žemės sukimosi apie savo ašį pasekmė. Sveiko žmogaus širdies darbas taip pat periodinis procesas, kurio kreivė pavaizduota 72 paveiksle.

Periodiniai procesai aprašomi periodinėmis funkcijomis.

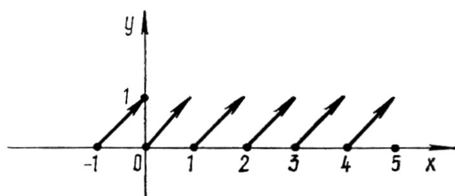
Apibrėžimas. *Funkcija $y=f(x)$ yra periodinė, jeigu galima rasti tokį skaičių $T>0$, kad su bet kuriuo x iš funkcijos apibrėžimo srities skaičiai $x-T$ ir $x+T$ taip pat priklausytų tai sričiai ir galiotų lygybė*

$$f(x)=f(x-T)=f(x+T).$$

Skaičius T vadinamas funkcijos *periodu.* Skaičiai nT, $n \in Z$, taip pat periodai. Jeigu tarp teigiamų periodų yra mažiausias, tai jį vadiname *pagrindiniu periodu.*

Pavyzdžiui, funkcija (seka) $y=(-1)^n$, $n \in N$, yra periodinė; jos periodas lygus 2. Šios funkcijos reikšmės (kai $n=1, 2, 3, 4, \ldots$) yra $-1, 1, -1, 1, \ldots$

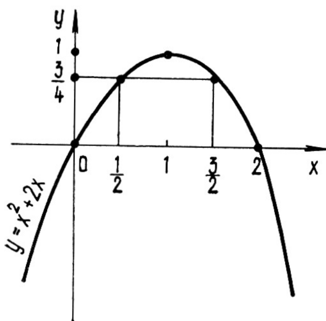
Funkcija $y=\{x\}=x-[x]$ vadinama skaičiaus x trupmenine dalimi. Skaičių trupmeninės dalys randamos šitaip: $\{5{,}72\}=5{,}72-5=$ $=0{,}72$, $\{0{,}45\}=0{,}45-0=0{,}45$, $\{-2{,}35\}=-2{,}35-(-3)=-2{,}35+3=$ $=0{,}65$. Jeigu prie skaičiaus x pridėsime 1, tai jo trupmeninė dalis nepasikeis. Taigi $\{x+1\}=\{x\}$. Funkcijos $y=\{x\}$ periodas lygus 1. Šios funkcijos grafikas pateiktas 100 paveiksle.



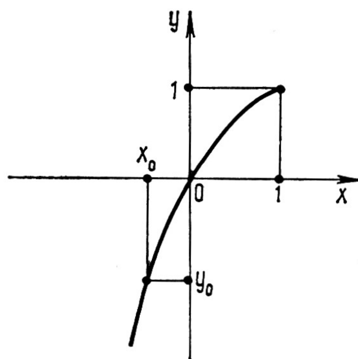
100 pav.

4.9. Atvirkštinės funkcijos

Imkime funkciją $y=f(x)$, apibrėžtą intervale $[a, b]$. Paėmę kurią nors argumento reikšmę x_0 galime vienareikšmiškai apskaičiuoti funkcijos reikšmę $f(x_0)$. Tačiau atvirkščias uždavinys ne visuomet išsprendžiamas vienareikšmiškai. Tuo galime įsitikinti nagrinėdami



101 pav.



102 pav.

funkciją $y=-x^2+2x$, kurios grafikas pavaizduotas 101 paveiksle. Pavyzdžiui, šios funkcijos reikšmę $y=\frac{3}{4}$ atitinka dvi argumento reikšmės $x_1=\frac{1}{2}$ ir $x_2=\frac{3}{2}$. Tačiau intervale $(-\infty, 1]$ vieną argumento reikšmę x_0, paimtą iš šios funkcijos apibrėžimo srities, atitinka tik viena funkcijos reikšmė y_0, ir atvirkščiai, kurią nors reikšmę y_0 iš tos funkcijos kitimo srities atitinka tik viena argumento reikšmė x_0 (žr. 102 pav.). Tokias pat išvadas galima padaryti nagrinėjant tą funkciją kitame monotoniškumo intervale $[1, +\infty)$.

Sakykime, funkcija $y=f(x)$ apibrėžta aibėje D. Jos reikšmių aibė yra E. Kiekvienas skaičius $y\in E$ atitinka tik vieną skaičių $x\in D$, su kuriuo $f(x)=y$. Aibėje E galime apibrėžti funkciją $x=g(y)$, kiekvienam $y\in E$ priskiriančią tą skaičių x, su kuriuo $f(x)=y$. Funkciją $x=g(y)$ vadiname *atvirkštine* funkcijai $y=f(x)$.

Norint rasti funkciją, atvirkštinę funkcijai $y=f(x)$, reikia iš šios funkcijos išreikšti (apibrėžti) $x=\varphi(y)$. Gautoji funkcija ir yra atvirkštinė funkcijai $y=f(x)$. Sukeitę kintamuosius vietomis (x visuomet laikomas argumentu) gauname atvirkštinės funkcijos išraišką.

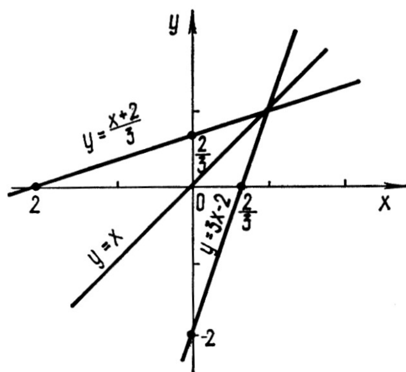
Pavyzdžiai. 1. Rasime funkciją, atvirkštinę funkcijai $y=3x-2$.

Iš lygybės $y=3x-2$ išreiškiame x:

$$3x=y+2, \qquad x=\frac{y+2}{3}.$$

Sukeitę kintamuosius vietomis gauname atvirkštinę funkciją $y=\frac{x+2}{3}$.

103 paveiksle pateikti funkcijos $y=3x-2$ ir jai atvirkštinės funkcijos $y=\frac{x+2}{3}$ grafikai. Kaip matome, šių funkcijų grafikai simetriški tiesės $y=x$ (I ir III ketvirčio pusiaukampinės) atžvilgiu.

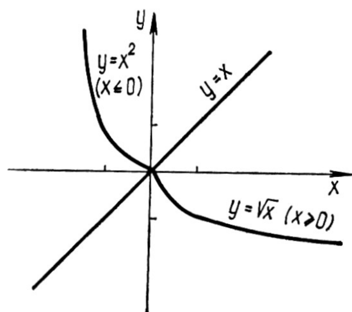


103 pav.

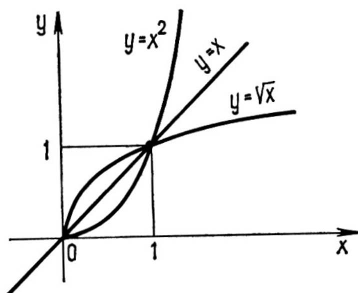
2. Rasime funkcijai $y=x^2$ atvirkštinę funkciją intervale $(-\infty, 0]$. Šiame intervale funkcija yra mažėjanti, jos reikšmių aibė yra $[0, +\infty)$. Vadinasi, atvirkštinė funkcija $y=g(x)$ yra apibrėžta intervale $[0, +\infty)$, o jos reikšmių aibė yra intervalas $(-\infty, 0]$. Iš lygybės $y=x^2$ išreiškiame x:

$$x=\pm\sqrt{y}.$$

Kadangi atvirkštinė funkcija turi įgyti reikšmes iš intervalo $(-\infty, 0]$, tai šaknis imama tik su minuso ženklu. Be to, sukeitę kintamuosius vietomis gauname $y=-\sqrt{x}$. Funkcijos $y=x^2$ intervale $(-\infty, 0]$ ir jai atvirkštinės funkcijos $y=-\sqrt{x}$ grafikai pavaizduoti 104 paveiksle. 105 paveiksle pateikti funkcijos $y=x^2$, kai $x>0$, ir jai atvirkštinės funkcijos $y=\sqrt{x}$ grafikai.



104 pav.

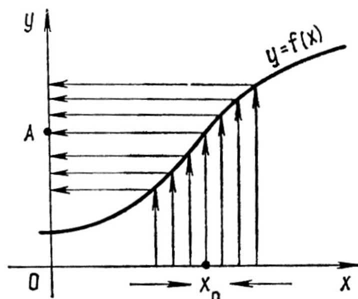


105 pav.

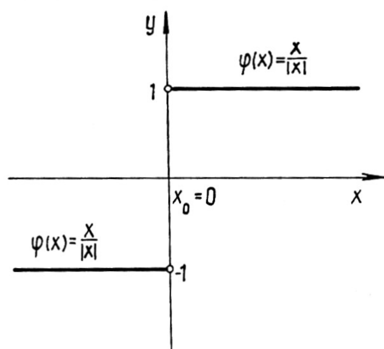
Iš šių pavyzdžių išplaukia: jeigu funkcija yra didėjanti, tai ir jai atvirkštinė yra taip pat didėjanti. Jeigu funkcija yra mažėjanti, tai ir jai atvirkštinė taip pat mažėjanti.

4.10. Funkcijos riba taške

Imkime funkciją $y=f(x)$, kurios grafikas pateiktas 106 paveiksle. Parinkdami x reikšmes, artėjančias prie x_0 (simboliškai žymėsime $x \to x_0$) tiek iš kairės, tiek ir iš dešinės pusės, pastebime, kad funkcijos reikšmės mažai skiriasi nuo A, t. y. $f(x) \approx A$. Be to, kuo x reikšmės bus artimesnės x_0 reikšmei, tuo lygybė $f(x) \approx A$ bus tikslesnė.



106 pav.



107 pav.

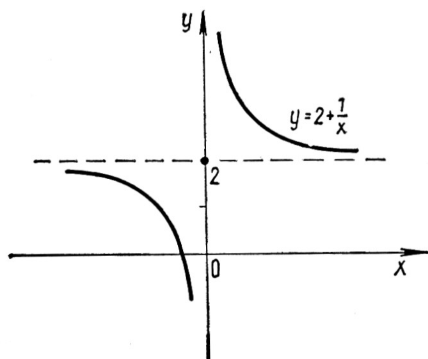
Kitaip tariant, kai $x \to x_0$, tai $f(x) \to A$. Dabar imkime funkciją $\varphi(x) = \frac{x}{|x|}$. Jos grafikas pavaizduotas 107 paveiksle. Funkcija φ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje, išskyrus $x=0$. Jeigu $x>0$, $\varphi(x)=1$, jeigu $x<0$, $\varphi(x)=-1$. Be to, kai $x \to 0$ iš dešinės (simboliškai tai užrašome $x \to 0+$), tai $\varphi(x) \to 1$; kai $x \to 0$ iš kairės (užrašome $x \to 0-$), tai $\varphi(x) \to -1$. Taigi, kai $x \to x_0$ iš abiejų pusių, $\varphi(x)$ įgyja skirtingas reikšmes.

Funkcijos $g(x)=2+\frac{1}{x}$ grafikas pateiktas 108 paveiksle. Matome, kad, kai $x \to +\infty$, $g(x) \to 2$; kai $x \to -\infty$, $g(x) \to 2$. Be to, kai $x \to 0+$, $g(x) \to +\infty$, o kai $x \to 0-$, $g(x) \to -\infty$.

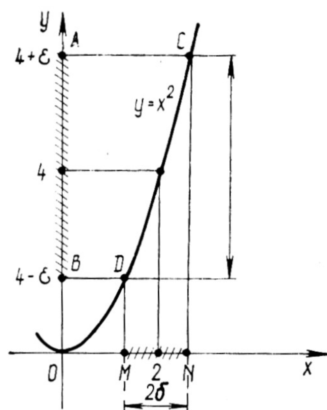
Imkime funkciją $y=x^2$ ir išnagrinėkime ją išsamiau. Apskaičiuokime šios funkcijos reikšmes (funkcijos ribą), kai $x \to 2$, ir pokytį $|x^2-4|$ taške $x=2$. Sudarysime lentelę ir nubraižysime grafiką (109 pav.).

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02
x^2	3,84	3,88	3,92	3,96	4,00	4,04	4,08
x^2-4	0,16	0,12	0,08	0,04	0	0,04	0,08

Lentelėje matyti: kuo argumento reikšmės artimesnės skaičiui 2, tuo $|x^2-4|$ mažesnis. Įrodysime: kad ir kokį mažą teigiamą skaičių ε imtume, visada galėsime nurodyti tokį intervalą (M, N), kurio



108 pav.



109 pav.

viduje yra taškas $x=2$, kad visuose to intervalo taškuose galiotų nelygybė

$$|x^2-4|<\varepsilon.$$

Iš tikrųjų

$$|x^2-4|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x^2-4<\varepsilon,$$

$$4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon}.$$

Imame tik teigiamas x reikšmes, nes mus domina funkcija, kai x reikšmės yra artimos 2. Nelygybė $|x^2-4|<\varepsilon$ yra teisinga intervale $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$. Pavyzdžiui, nelygybė $|x^2-4|\leqslant 0{,}1$ (čia $\varepsilon=0{,}1$) teisinga intervale $(\sqrt{3{,}9}, \sqrt{4{,}1}) \Rightarrow (1{,}98,\ 2{,}02)$. Nelygybė $|x^2-4|<$ $<0{,}01$ (čia $\varepsilon=0{,}01$) teisinga intervale $(\sqrt{3{,}99}, \sqrt{4{,}01}) \Rightarrow (1{,}998,$ $2{,}002)$.

Atkarpa MN, arba intervalas $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$, pavaizduota 109 paveiksle. Šiame paveiksle iš taško A, arba $4+\varepsilon$, brėžiame statmenį ašiai Oy iki susikirtimo su grafiku taške C. Iš taško C nuleidžiame statmenį į ašį Ox. Gauname tašką N. Iš taško D nuleidę statmenį į ašį Ox gauname tašką M. Atkarpa MN ir yra intervalas $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$, kurį anksčiau gavome algebriškai.

Imdami x reikšmes, pakankamai artimas 2, gauname funkcijos $y=x^2$ reikšmes, pakankamai artimas 4. Galime pasiekti, kad būtų

$$|x^2-4|<0{,}001,$$
$$|x^2-4|<0{,}0001$$

ir t. t.

Iš to, kas buvo pasakyta apie funkciją $y=x^2$, aišku, kad $y\to 4$, kai $x\to 2$. Šis faktas simboliškai užrašomas šitaip:

$$\lim_{x\to 2} x^2=4.$$

Simbolis lim yra lotynų kalbos žodžio *limes* — „riba" santrumpa.

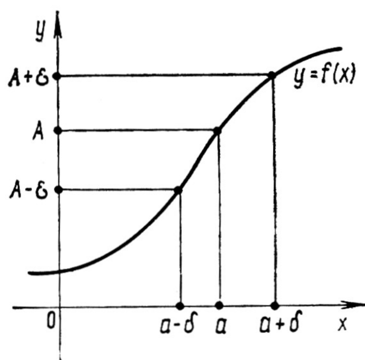
1 apibrėžimas. *Skaičius A vadinamas funkcijos $y=f(x)$ riba, kai $x\to a$, jeigu imant bet kokį teigiamą skaičių ε galima parinkti tokį intervalą $(a-\delta,\ a+\delta)$, kurio viduje, išskyrus galbūt patį tašką $x=a$, galiotų nelygybė $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Šis apibrėžimas dažnai formuluojamas vartojant simbolius $\forall$ ir $\exists$. Užrašas $\forall x$ reiškia „su bet kuriuo x", o užrašas $\exists x$ — „egzistuoja toks x".

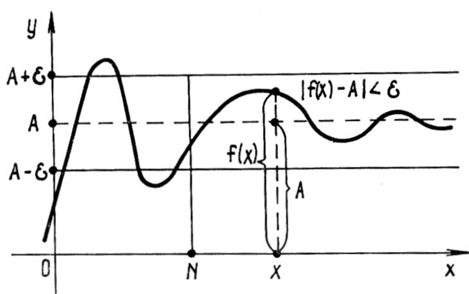
2 apibrėžimas. $\lim f(x)=A$, *kai* $x\to a$, *jeigu* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *kad* $\forall x\in(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$, *išskyrus galbūt* $x=a$, *galioja nelygybė*

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Šį funkcijos ribos apibrėžimą galime pavaizduoti grafiškai (žr. 110 pav.). Imkime $\varepsilon>0$ ir ašyje Oy pažymėkime taško A ε aplinką,



110 pav.



111 pav.

t. y. intervalą $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$. Per šio intervalo galus brėžiame tieses, lygiagrečias ašiai Ox. Gauname 2ε pločio juostą. Kai x reikšmės imamos iš intervalo $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$, funkcijos grafikas yra tarp tiesių $y=A-\varepsilon$ ir $y=A+\varepsilon$. Skaičius δ priklauso nuo pasirinkto skaičiaus ε. Mažinant ε mažės ir δ. Intervalas $(a-\delta,\ a+\delta)$ vadinamas taško a aplinka $(x\neq a)$.

Pavyzdžiai. 1. $f(x)=3x-1$. Įrodykime, kad

$$\lim_{x\to 1}(3x-1)=2.$$

Funkcija apibrėžta, kai $x\in R$. Reikia įrodyti: kai $\varepsilon>0$, galime parinkti tokį $\delta>0$, kad galiotų nelygybė

$$|f(x)-2|<\varepsilon.$$

Sprendžiame:

$$|(3x-1)-2|=|3x-3|=3|x-1|.$$

Iš čia $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$. Vadinasi, galime laikyti $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Pavyzdžiui, paėmę $\varepsilon=0,1$, gauname

$|x-1|<\frac{0,1}{3} \Leftrightarrow |x-1|<0,03 \Leftrightarrow -0,03<x-1<0,03 \Leftrightarrow 0,73<x<1,03.$

Paėmę $\varepsilon=0,01$, gauname $|x-1|<\frac{0,01}{3} \Leftrightarrow -0,003<x-1<$ $<0,003 \Leftrightarrow 0,997<x<1,003$. Radome tokį δ, kad su visais $x\in(1-\delta, 1+\delta)$ galioja nelygybė $|f(x)-2|<\varepsilon$. Taigi

$$\lim_{x\to 1}(3x-1)=2.$$

2. Įrodykime, kad $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$. Ši funkcija apibrėžta, kai $x\in R$, $x\neq 1$. Tuo atveju minėtą funkciją suprastiname:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1.$$

Taigi $f(x)=x+1$.

Randame x reikšmių intervalą, kuriame $|f(x)-2|<\varepsilon$: $|f(x)-$ $-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\varepsilon$, kai $x\neq 1$. $\forall\ \varepsilon>0$ galima imti $\delta=\varepsilon$. Tada, kai $0<|x-1|<\delta$, galioja nelygybė $|x-1|<\varepsilon$.

Kai $\varepsilon=0,1$, tai $|x-1|<0,1 \Leftrightarrow -0,1<x-1<0,1 \Leftrightarrow 0,9<x<1,1$.

Kai $\varepsilon=0,01$, tai $|x-1|<0,01 \Leftrightarrow -0,01<x-1<0,01 \Leftrightarrow 0,99<$ $<x<1,01$.

Kaip matome, galima nurodyti x reikšmių intervalą, kuriame galioja nelygybė $|f(x)-2|<\varepsilon$.

3 apibrėžimas. *Skaičius A vadinamas funkcijos $y=f(x)$ riba, kai $x\to+\infty$, jeigu imant bet kurį kiek norima mažą teigiamą ε galima nurodyti tokį teigiamą skaičių $N=N(\varepsilon)$, kad su visomis x reikšmėmis, didesnėmis už N, galiotų nelygybė*

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Rašoma:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

Imant $\varepsilon>0$, nelygybę $|f(x)-A|<\varepsilon$ tenkina visos x reikšmės iš intervalo $[N, +\infty)$, kai N nustatomas atsižvelgiant į pasirinktą ε. 111 paveiksle matyti, kad funkcijos $f(x)$ grafiko taškų ordinatės yra tarp skaičių $A-\varepsilon$ ir $A+\varepsilon$, kai tų taškų abscisės x didesnės už N.

Kadangi skaičius N priklauso nuo ε, tai mažinant ε skaičių N reikia didinti. Geometriškai tai reiškia štai ką: kuo siauresnė juosta tarp tiesių $y=A-\varepsilon$ ir $y=A+\varepsilon$, tuo toliau reikia eiti į dešinę, kad funkcijos grafikas neišeitų iš minėtosios juostos.

Panašiai galima aptarti ir funkcijos $f(x)$ ribą, kai $x\to-\infty$.

Pavyzdys. Imkime funkciją

$$f(x)=1+\frac{1}{x}.$$

Kai $x\to+\infty$, $f(x)\to 1$. Iš tikrųjų

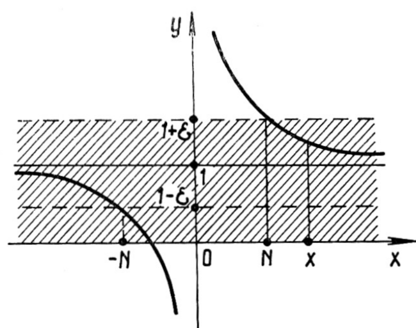
$$\left|1+\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

arba

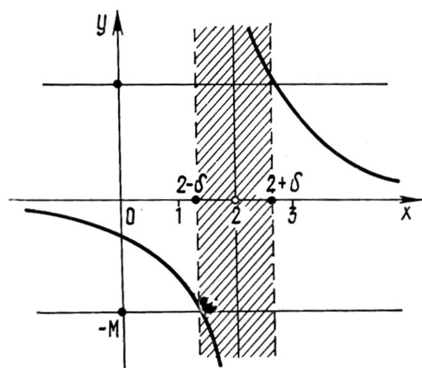
$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Taigi $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Pavyzdžiui, kai $\varepsilon=0{,}1$, $N=10$; kai $\varepsilon=0{,}01$, $N=100$.



112 pav.



113 pav.

112 paveiksle matyti, kad, kai $|x|>N$, funkcijos reikšmės yra intervale $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Tuo atveju

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Beje, kai $x\to-\infty$, šios funkcijos riba taip pat vienetas, t. y.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

4 apibrėžimas. *Funkcija $y=f(x)$, kai $x\to x_0$, turi begalinę ribą $(\pm\infty)$, jeigu imant bet kurį kiek norima didelį teigiamą skaičių M galima nurodyti tokį teigiamą skaičių δ, kad su visomis x reikšmėmis, skirtingomis nuo x_0 ir tenkinančiomis sąlygą $|x-x_0|<\delta$, yra teisinga nelygybė*

$$|f(x)|>M.$$

Pavyzdžiui, nagrinėdami funkciją $f(x)=\frac{1}{x-2}$ pastebime, kad ji

apibrėžta, kai $x \neq 2$. Tačiau, kai $x \to 2$, $y \to \pm\infty$. Tą galime pastebėti ir lentelėje

x	0	1	1,5	1,9	1,99	...	2,01	2,1	2,5	3	4
$\frac{1}{x-2}$	$-0{,}5$	-1	-2	-10	-100	...	100	10	2	1	0,5

113 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=\frac{1}{x-2}$ grafikas. Matome, kad nesunkiai galime nurodyti tokį intervalą $(2-\delta,\ 2+\delta)$, kuriame $\left|\frac{1}{x-2}\right|>M$, arba $|x-2|<\frac{1}{M}$. Pavyzdžiui, parinkus $M=1000$, t. y. norint, kad būtų $f(x)>1000$, reikia imti x reikšmes, besiskiriančias nuo 2 mažiau kaip 0,001:

$$|x-2|<0{,}001 \quad \text{arba} \quad 1{,}999<x<2{,}001.$$

Remdamiesi funkcijos begalinės ribos ($\pm\infty$) apibrėžimu galime užrašyti, kad

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\pm\infty, \text{ arba } \lim_{x\to 2-}\frac{1}{x-2}=-\infty \text{ ir } \lim_{x\to 2+}\frac{1}{x-2}=\infty.$$

Apibrėžimas. Jeigu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, *tai funkcija* $f(x)$ *vadinama neaprėžtai didėjančia.*

4.11. Nykstančios funkcijos ir jų savybės

4.11.1. Nykstančios funkcijos.

Apibrėžimas. *Jeigu* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, *tai funkcija* $f(x)$ *vadinama nykstančia taške* $x=a$.

Tokios funkcijos simboliškai žymimos $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ ir t. t. Kai $x\to\infty$, funkcijos $\alpha(x)=\frac{1}{x}$, $\beta(x)=\frac{1}{x^2}$, $\gamma(x)=\frac{1}{x^3}$ yra nykstančios.

Imkime funkciją $\alpha(x)=\frac{1}{x}$. Įsitikinkime, kad jos riba lygi nuliui, kai $x\to\infty$. Pagal funkcijos ribos apibrėžimą

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

Jeigu imsime $x>0$, tai bus $\frac{1}{x}<\varepsilon$, arba $x>\frac{1}{\varepsilon}$. Taigi galima nurodyti tokias x reikšmes, su kuriomis galioja

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Tai reiškia, kad funkcija $\alpha(x)=\frac{1}{x}$ yra nykstanti. Panašiai samprotaudami galime įsitikinti, kad funkcijos $\frac{1}{x^2}$ ir $\frac{1}{x^3}$ taip pat yra nykstančios, kai $x\to\infty$.

Dabar imkime bet kurią funkciją $f(x)$ ir tarkime, kad $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Vadinasi, tam tikroje taško a aplinkoje bus teisinga nelygybė

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Skirtumą $|f(x)-A|$ pažymėję $\alpha(x)$, tą nelygybę galime užrašyti šitaip:

$$|\alpha(x)-0|<\varepsilon, \text{ arba } \lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Taigi, *jeigu* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, *tai* $f(x)-A=\alpha(x)$ *nyksta, kai* $x\to a$. *Teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu skirtumas* $f(x)-A=\alpha(x)$ *nyksta, kai* $x\to a$, *tai* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Šie teiginiai nurodo būtiną ir pakankamą funkcijos ribos egzistavimo sąlygą:

funkcija $f(x)$ *taške* a *turi ribą* A *tada ir tik tada, kai ją galima išreikšti suma*

$$A+\alpha(x),$$

kurioje $\alpha(x)$ *nyksta, kai* $x\to a$.

Pavyzdys. Apskaičiuosime

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right).$$

Kadangi $\frac{1}{x^2}$ yra nykstanti funkcija, kai $x\to\infty$, o skaičius 2 visai nepriklauso nuo x, tai

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=2.$$

4.11.2. Nykstančių funkcijų savybės. 1. *Baigtinio skaičiaus nykstančių funkcijų suma yra nykstanti funkcija.*

Imkime 3 nykstančias funkcijas

$$\alpha(x),\quad \beta(x),\quad \gamma(x).$$

Remdamiesi nykstančių funkcijų apibrėžimu, turime $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=0$. Be to, turi būti tokios taško $x=a$ aplinkos, kuriose būtų teisingos atitinkamos nelygybės

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |\gamma(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Mažiausioje iš taško a aplinkų bus teisingos visos trys nelygybės. Žinome, kad

$$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$$

(žr. 2.1.4 skirsnelį). Pritaikę šią algebrinės sumos modulio savybę, galime užrašyti, kad

$$|\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)|\leqslant|\alpha(x)|+|\beta(x)|+|\gamma(x)|,$$

arba

$$|\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Taigi $\forall\ \varepsilon>0$ galioja

$$|\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)|<\varepsilon.$$

Tai reiškia, kad nykstančių funkcijų $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ suma yra nykstanti funkcija.

Pavyzdžiui, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ yra nykstančios funkcijos, kai $x\to\infty$. Jų suma taip pat nykstanti, t. y.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=0.$$

2. *Aprėžtosios ir nykstančios funkcijų sandauga yra nykstanti funkcija.*

Jeigu $f(x)$ yra aprėžta, o $\alpha(x)$ — nykstanti funkcija, tai $f(x)\cdot\alpha(x)$ yra nykstanti funkcija.

Pavyzdys. Nagrinėkime $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}\cdot x^2$. Funkcija $\frac{1}{1+x^2}$, kai $x\to0$, yra aprėžta intervale (0, 1] (žr. 4.6 skirsnį). Funkcija x^2, kai $x\to0$, yra nykstanti. Šių funkcijų sandauga $\frac{1}{1+x^2}\cdot x^2$ yra nykstanti funkcija, t. y.

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}\cdot x^2=0.$$

Išvados. 1. *Pastovaus skaičiaus ir nykstančios funkcijos sandauga yra nykstanti funkcija, t. y. jeigu* $\alpha(x)\to0$, *kai* $x\to a$, *ir* $c=\text{const}$, *tai*

$$c\cdot\alpha(x)\to0,\ \textit{kai}\ x\to a.$$

2. *Dviejų ar kelių nykstančių funkcijų sandauga yra nykstanti funkcija, t. y. jeigu* $\alpha(x)\to0$, $\beta(x)\to0$, $\gamma(x)\to0$, *kai* $x\to a$, *tai*

$$\alpha(x)\cdot\beta(x)\cdot\gamma(x)\to0,\ \textit{kai}\ x\to a.$$

4.12. Pagrindinės ribų teoremos

Tarkime, kad funkcijos, apie kurias toliau kalbėsime, turi baigtines ribas.

1. *Pastovaus skaičiaus C riba yra pats pastovus skaičius.*

Remdamiesi funkcijos $f(x)=C$ ribos egzistavimo sąlyga taške $x=a$, rašome

$$C=C+\alpha(x).$$

Pritaikę funkcijos ribos apibrėžimą, gauname

$$\lim_{x\to a} C = C.$$

Pavyzdžiui, $\lim_{x\to 2} 5 = 5$, $\lim_{x\to 3}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$ ir t. t.

2. *Funkcijų algebrinės sumos riba lygi atskirų dėmenų ribų sumai.*

Sakykime, $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$.

Remdamiesi funkcijų ribos egzistavimo sąlyga (žr. 4.11), galime užrašyti

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x);$$

čia $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ — nykstančios funkcijos. Sudėję gautųjų lygybių abi puses, turime

$$f(x) + g(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x).$$

Kadangi kelių nykstančių funkcijų suma yra nykstanti funkcija, tai, pažymėję $\alpha(x) + \beta(x) = \gamma(x)$, rašome

$$f(x) + g(x) = A + B + \gamma(x).$$

Funkcija $f(x) + g(x)$ yra pastovaus dydžio $A + B$ ir nykstančios funkcijos $\gamma(x)$ suma, todėl pagal funkcijos ribos egzistavimo požymį (žr. 4.11)

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

arba

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Ši teorema galioja imant bet kurį baigtinį dėmenų skaičių. Kitas teoremas pateiksime be įrodymo.

3. *Baigtinio skaičiaus funkcijų sandaugos riba lygi atskirų dauginamųjų ribų sandaugai.*

Jeigu $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, tai

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

Jeigu vienas iš dauginamųjų (funkcijų) yra pastovus, pavyzdžiui, $f(x) = C$, tai pagal 1 teoremą

$$\lim_{x\to a}(C\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} C\cdot\lim_{x\to a} g(x) = C\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

Kaip matome, pastovų daugiklį galima iškelti prieš ribos ženklą. Pavyzdžiui, $\lim_{x\to 3} 2x^2 = 2\lim_{x\to 3} x^2 = 2\cdot 3^2 = 2\cdot 9 = 18.$

4. *Funkcijų dalmens riba lygi dalinio ir daliklio ribų dalmeniui, jei daliklio riba nelygi nuliui:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\ jei\ \lim_{x\to a}g(x)\neq 0.$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2+5x+2}{x^3-x+1}.$$

Iš pradžių skaičiuojame vardiklio ribą:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-x+1)=2^3-2+1=8-2+1=7.$$

Po to taikome 4 teoremą:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2+5x+2}{x^3-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(4x^2+5x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x+1)}=\frac{4\cdot 4+5\cdot 2+2}{2^3-2+1}=\frac{28}{7}=4.$$

2. Apskaičiuosime

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}.$$

Kai $x=1$, trupmenos vardiklis lygus 0, todėl 4 teoremos negalima taikyti. Trupmeną prastiname pritaikę kvadratinio trinario skaidymo formulę $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$:

$$\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=x-3.$$

Ieškome

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-3)=1-3=-2.$$

3. Rasime

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+x+1}{2+4x-5x^2+2x^3}.$$

Šiuo atveju trupmenos skaitiklis ir vardiklis bus neapibrėžtos funkcijos. Taigi 4 teoremos (dalmens ribos) taikyti negalime. Padalykime trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš x^3 ir pritaikykime pagrindines ribų teoremas:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+x+1}{2+4x-5x^2+2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x}+2}=\frac{4-0+0+0}{0+0-0+2}=\frac{4}{2}=2.$$

Dėmenys $\frac{5}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{2}{x^3}$, $\frac{4}{x^2}$, $\frac{5}{x}$ yra nykstančios funkcijos, kai $x\to\infty$, todėl jų ribos lygios 0.

4. Apskaičiuosime

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

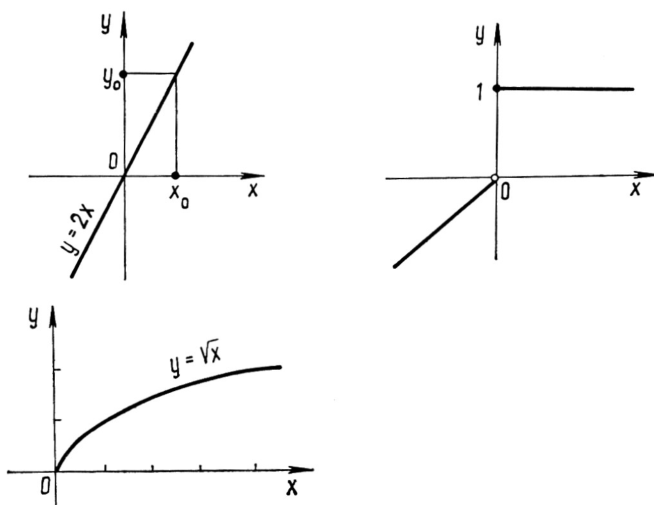
Kai $x=0$, trupmenos vardiklis lygus 0, todėl tiesiogiai ribos skaičiuoti negalime. Padauginkime trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš $1+\sqrt{1-x^2}$ ir apskaičiuokime:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

4.13. Funkcijos tolydumas

Norėdami nubraižyti funkcijos $f(x)$ grafiką, imame leistinąsias argumento reikšmes x_1, x_2, $x_3, \ldots$ ir apskaičiuojame funkcijų $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3), \ldots$ reikšmes. Skaičių poras $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3)), \ldots$ pažymime koordinačių sistemoje ir gautus taškus sujungiame. Taip galime daryti tik tuomet, kai funkcijos $f(x)$ grafikas



114 pav.

yra nenutrūkstanti linija, kitaip tariant, kai funkcija $f(x)$ yra tolydi. Anksčiau nagrinėtos funkcijos $y=kx+b$, $y=\frac{k}{x}$, $y=ax^2+bx+c$ yra tolydžios savo apibrėžimo srityse — tą rodo ir jų nenutrūkstantys grafikai.

Imkime funkcijas $y=2x$, $y=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $y=\sqrt{x}$. Jų grafikai pavaizduoti 114 paveiksle. Funkcijos $y=2x$ grafikas nenutrūksta esant bet kokioms x reikšmėms, todėl sakome, kad ši funkcija yra tolydi bet kuriame taške $x=x_0$.

Funkcijos

$$y=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

grafikas nutrūksta taške $x=0$, todėl sakome, kad tame taške funkcija yra trūki, arba turi trūkį. Funkcijos $y=\sqrt{x}$ grafikas yra nenutrūkstanti kreivė, kai $x\geqslant 0$. Taigi šioje srityje funkcija $y=\sqrt{x}$ yra tolydi.

1 apibrėžimas. *Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, jei*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Taigi tolydžioji funkcija $f(x)$ yra apibrėžta taške x_0, turi ribą šiame taške ir ta riba lygi funkcijos reikšmei $f(x_0)$, t. y.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=x^2+1$ yra tolydi taške $x_0=1$, nes, kai $x=1$, $f(x)=2$, be to, jos reikšmė $f(1)=2$ sutampa su funkcijos riba šiame taške, t. y. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$.

Funkcija $f(x)=\dfrac{5x^2+3}{2x+2}$ yra tolydi taške $x=1$, nes $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+3}{2x+2}=2$ ir $f(1)=2$.

2 apibrėžimas. *Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, jeigu jos pokytis $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ artėja prie nulio, kai argumento pokytis $\Delta x=x-x_0$ artėja prie nulio, t. y.*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Pavyzdys. Ištirkime, ar funkcija $y=x^2$ yra tolydi bet kuriame taške x.

Suteikus argumentui pokytį Δx, funkcija įgyja pokytį

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

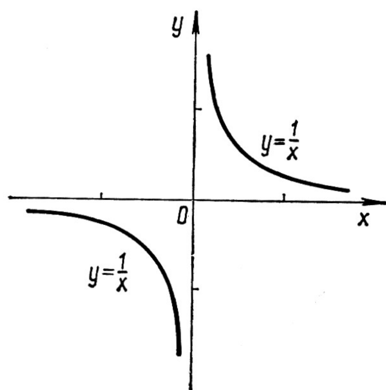
Raskime ribą Δy, kai $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(2x\Delta x+(\Delta x)^2)=2x\cdot 0+0^2=0.$$

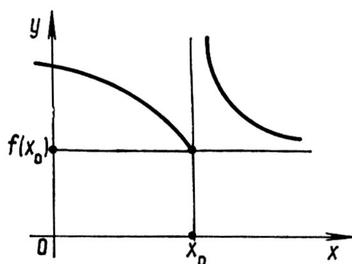
Taigi funkcija $y=x^2$ yra tolydi su visomis x reikšmėmis.

3 apibrėžimas. *Funkcija, tolydi kiekviename intervalo (a, b) taške, vadinama tolydžia tame intervale.*

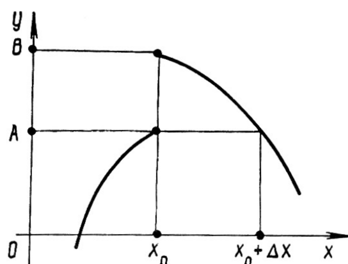
Intervalas (a, b) vadinamas funkcijos *tolydumo* intervalu. Pavyzdžiui, funkcija $y=\frac{1}{x}$, kurios grafikas pavaizduotas 115 paveiksle, yra tolydi intervaluose $(-\infty, 0)$ ir $(0, +\infty)$.



115 pav.



116 pav.



117 pav.

4.13.1. Funkcijos trūkio taškai. Tiriant funkcijos tolydumą taško x_0 aplinkoje, galima kalbėti apie jų tolydumą tiek iš kairės, tiek ir iš dešinės šio taško pusės.

Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0 iš kairės, jeigu

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0).$$

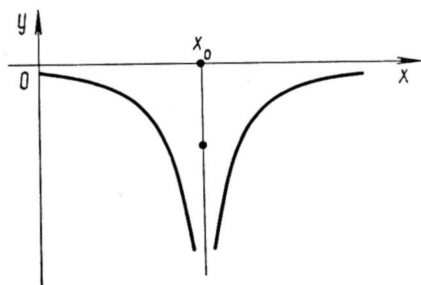
Pavyzdžiui, 116 paveiksle atvaizduota funkcija yra tolydi taške x_0 iš kairės.

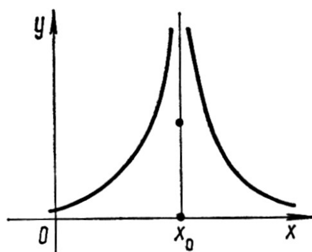
Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0 iš dešinės (žr. 117 pav.), jeigu

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0).$$

Funkcijos, kurių grafikai pateikti 118 paveiksle, yra netolydžios iš abiejų taško x_0 pusių.

Įsitikinkite, kad funkcija $y=\sqrt{x}$ yra tolydi taške $x_0=0$ iš dešinės.

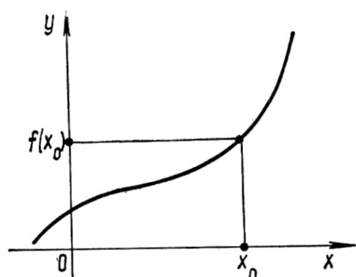




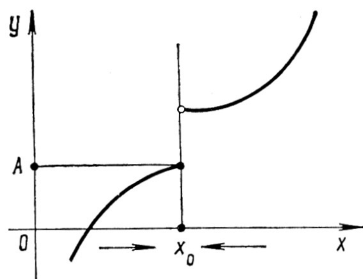
118 pav.

Kad funkcija $f(x)$ būtų tolydi taške x_0, būtina ir pakankama, kad ji tame taške būtų tolydi tiek iš kairės, tiek iš dešinės ir galiotų lygybės

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0).$$



119 pav.



120 pav.

119 paveiksle pavaizduota funkcija yra tolydi taške x_0, nes tame taške ji abipusiai tolydi. Funkcijos $f(x)$ trūkis taške x_0 galimas tada, kai:

1) funkcija $f(x)$ taške x_0 yra neapibrėžta;
2) neegzistuoja $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Tašką x_0 laikysime funkcijos $f(x)$ pirmosios rūšies trūkio tašku, jeigu

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)\neq\lim_{x\to x_0+} f(x),$$

t. y. jeigu iš abiejų taško x_0 pusių yra skirtingos ribos (žr. 120 pav.).

Tašką x_0 laikysime funkcijos $f(x)$ antrosios rūšies trūkio tašku, jeigu neegzistuoja arba yra begalinė bent viena iš vienpusių ribų.

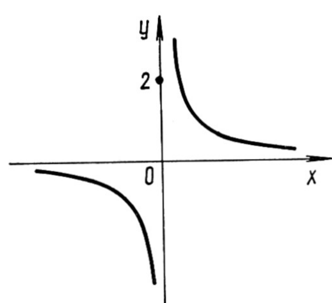
Pavyzdžiui, funkcija

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ kai } x\neq 0,\\ 2, \text{ kai } x=0,\end{cases}$$

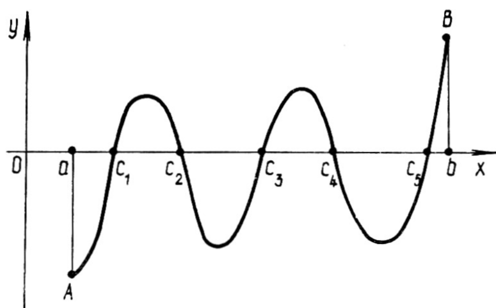
(121 pav.) taške $x=0$ turi antrosios rūšies trūkį, nes šiuo atveju

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty \text{ ir } \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Be to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neegzistuoja.



121 pav.



122 pav.

4.13.2. Tolydžiųjų funkcijų savybės. Iš funkcijos tolydumo taške x_0 išplaukia, kad tolydžioji funkcija tame taške turi baigtinę ribą. Tuo remiantis tolydžiosioms funkcijoms taikomos ribų teoremos.

1 teorema. *Baigtinio skaičiaus tolydžiųjų funkcijų algebrinė suma yra tolydžioji funkcija.*

2 teorema. *Baigtinio skaičiaus tolydžiųjų funkcijų sandauga yra tolydžioji funkcija.*

Įrodymas. Sakykime, $F(x)=f(x)\cdot g(x)$. Pagal funkcijos tolydumo apibrėžimą funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ turi baigtines ribas:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

Pritaikę funkcijų sandaugos ribos teoremą, turime:

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)=F(x_0).$$

Ši lygybė patvirtina, kad tolydžiųjų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ sandauga yra tolydžioji funkcija.

3 teorema. *Funkcija x^n, $n\in N$, yra tolydi, kai $x\in R$.*

Kadangi $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot x\ldots x}_{n \text{ kartų}}$, tai funkcija x^n yra tolydi kaip tolydžiųjų funkcijų sandauga.

4 teorema. *Daugianaris $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ yra tolydžioji funkcija, kai $x\in R$.*

Įrodymas. Pažymėję $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, minėtą daugianarį nagrinėjame kaip argumento x funkciją. Kiekvienas šio daugianario narys yra tolydžioji funkcija, kaip koeficiento a ir funkcijos x^n sandauga (2 teorema). Tolydžiųjų funkcijų suma yra tolydžioji funkcija (1 teorema). Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=4x^3-5x^2+3x+1$ yra tolydi, kai $x\in R$.

5 teorema. *Funkcija*

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

yra tolydi savo apibrėžimo srityje.

Čia $P(x)$ ir $Q(x)$ — tolydžiosios funkcijos (4 teorema) ir $Q(x)\neq 0$.

Šią teoremą galima paaiškinti remiantis funkcijų dalmens ribos teorema:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \text{jeigu}\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

Pavyzdžiui, funkcija

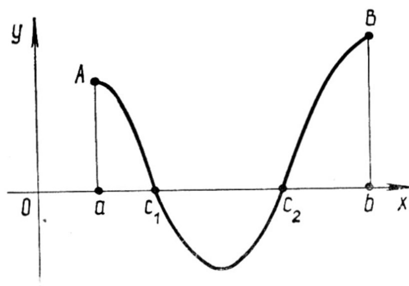
$$f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$$

yra tolydi visų realiųjų skaičių aibėje, išskyrus $x_1=1$, $x_2=3$. Tuo įsitikiname išskaidę dauginamaisiais trupmenos skaitiklį ir vardiklį:

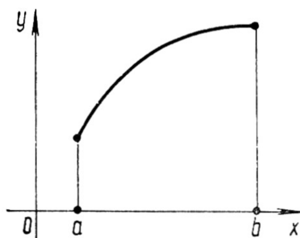
$$f(x)=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{(x-1)(x-3)}.$$

6 teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $x\in[a,b]$ ir šio intervalo galuose funkcijos reikšmės yra skirtingų ženklų, tai šio intervalo viduje yra bent viena argumento x reikšmė, su kuria funkcija lygi nuliui.*

Funkcija $f(x)$ intervale $[a, b]$ gali būti lygi nuliui ne vieną, bet keletą kartų. Tai matome 122 paveiksle. Be to, jeigu $f(a)$ ir $f(b)$ yra vienodų ženklų, tai intervale $[a, b]$ $f(x)$ gali įgyti reikšmę, lygią nuliui (123 pav.), bet gali ir nebūti lygi nuliui (124 pav.).



123 pav.



124 pav.

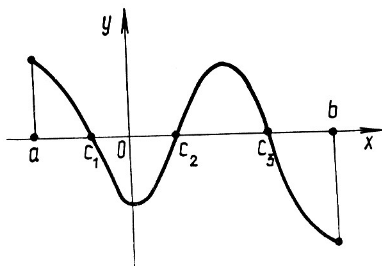
6 teorema taikoma apytiksliai skaičiuojant konkrečios lygties šaknis bei sprendžiant nelygybes.

Pavyzdys. Lygtis $x^3-4x+1=0$ intervale $[0, 1]$ turi bent vieną šaknį. Apskaičiuokime ją šimtosios tikslumu.

Funkcija $f(x)=x^3-4x+1$ tolydi, kai $x\in R$. $f(0)=1$, $f(1)=-2$. Kadangi intervalo $[0, 1]$ galuose funkcija įgyja skirtingų ženklų reikšmes, tai bent viename to intervalo taške ji lygi nuliui, t. y. lygtis $x^3-4x+1=0$ intervale $[0, 1]$ turi šaknį. Intervalą $[0, 1]$ padaliję pusiau, gauname du intervalus $[0, \frac{1}{2}]$ ir $[\frac{1}{2}, 1]$. Intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ galuose funkcijos $f(x)$ reikšmės yra vienodų ženklų:

$f(\frac{1}{2})=-\frac{7}{8}$ ir $f(1)=-2$. Taigi tame intervale šaknų nėra. Intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ galuose funkcijos $f(x)$ reikšmės yra skirtingų ženklų: $f(0)=1$, $f(\frac{1}{2})=-\frac{7}{8}$. Tai reiškia, kad šaknis yra šiame intervale. Randame $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{64}$. Vadinasi, šaknis yra intervale $[\frac{1}{64}, \frac{1}{2}]$. Tęsiant šį procesą, šaknį galima apskaičiuoti norimu tikslumu. Sakykime, šaknį reikia rasti 0,01 tikslumu. Tam tikslui intervalą [0, 1] dalijame į 10 dalių. Gauname taškus 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Randame funkcijos reikšmes tuose taškuose: $f(0)=1$, $f(0{,}1)=0{,}601$, $f(0{,}2)=0{,}208$, $f(0{,}3)=-0{,}173$. Iš čia išplaukia, kad lygties šaknis yra intervale [0,2, 0,3]. Šį intervalą dalijame į 10 lygių dalių. Gauname taškus, kuriuose funkcijos reikšmės yra šitokios: $f(0{,}21)\approx 0{,}169$, $f(0{,}22)\approx 0{,}130$, $f(0{,}23)\approx 0{,}092$, $f(0{,}24)\approx 0{,}054$, $f(0{,}25)\approx$ $\approx 0{,}016$, $f(0{,}26)\approx -0{,}023$. Taigi šaknis yra intervale [0,25, 0,26]. Kitaip tariant, lygties $x^3-4x+1=0$ šaknis 0,01 tikslumu yra $x=0{,}25$.

Funkcijų tolydumą intervaluose pritaikykime nelygybėms spręsti. Prisiminkime, jeigu funkcija intervale (a, b) yra tolydi ir nė viename jo taške nelygi nuliui, tai šiame intervale funkcija yra pastovaus ženklo. Tą galime pastebėti 125 paveiksle. Jame matome, kad inter-



125 pav.



126 pav.

valuose (a, c_1) ir (c_2, c_3) $f(x)>0$, o intervaluose (c_1, c_2) ir (c_3, b) $f(x)<0$. Sprendžiant nelygybę $f(x)\gtreqless 0$, iš pradžių tenka ieškoti funkcijų šaknų, t. y. x reikšmių, su kuriomis $y=0$. Geometriniu požiūriu — tai grafiko susikirtimo su ašimi Ox taškai c_1, c_2, c_3 (žr. 125 pav.). Šie taškai visą realiųjų skaičių intervalą padalija į atskirus intervalus. Patikrinę funkcijos ženklus atskiruose intervaluose ir įsitikinę, kad juose funkcija turi pastovų ženklą, galime užrašyti nelygybės $f(x)\gtreqless 0$ sprendinius.

Pavyzdžiai. Išspręsime nelygybes.

1. $\frac{x+3}{x-2}>0$.

Funkcija $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ lygi nuliui, kai $x=-3$. Be to, ji turi trūkį taške $x=2$. Pažymėję šiuos taškus skaičių ašyje, visą realiųjų skaičių intervalą padalijame į tris intervalus: $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$ ir (2,

$+\infty)$ (žr. 126 pav.). Kadangi atskiruose intervaluose funkcija yra pastovaus ženklo, tai norint jį nustatyti, pakanka imti po vieną argumento reikšmę iš tų intervalų:

$$(-\infty, -3):\ f(-4)=\frac{-4+3}{-4-2}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}>0,$$

$$(-3, 2):\ f(0)=\frac{0+3}{0-2}=-\frac{3}{2}=-1{,}5<0,$$

$$(2, +\infty):\ f(3)=\frac{3+3}{3-2}=\frac{6}{1}=6>0.$$

126 paveiksle sužymėti funkcijų ženklai atskiruose intervaluose. Matome, kad funkcija $\frac{x+3}{x-2}>0$, kai

$$x\in(-\infty, -3)\cup(2, +\infty).$$

Nelygybės $\frac{x+3}{x-2}\geqslant 0$ atsakymą užrašome šitaip:

$$x\in(-\infty, -3]\cup(2, +\infty).$$

2. $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0.$

Išskaidome skaitiklį ir vardiklį dauginamaisiais:

$$x^3-3x^2-x+3=x(x^2-1)-3(x^2-1)=(x^2-1)(x-3)=$$
$$=(x+1)(x-1)(x-3);$$

$$x^2+3x+2=0,\qquad x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2},$$

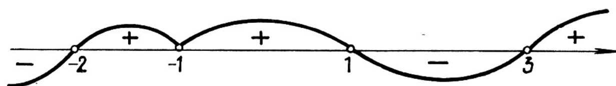
$$x_1=-2,\qquad x_2=-1.$$

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

Nelygybę užrašome šitaip:

$$\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+2)}>0.$$

Skaitiklio daugianario šaknys yra $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$. Vardiklio daugianario šaknys yra $x_4=-1$, $x_5=-2$. Šias x reikšmes pažymime skaičių ašyje ir gauname 5 intervalus (127 pav.).



127 pav.

Randame funkcijos ženklą atskiruose intervaluose:

$$f(-3)=-24<0,\qquad f\left(-\frac{3}{2}\right)=22{,}5>0,\qquad f(0)=1{,}5>0,$$

$$f(2)=-\frac{1}{4}<0,\quad f(4)=\frac{1}{2}>0.$$

Paveiksle matome, kad nelygybę tenkina

$$x \in (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty).$$

Suprastinę trupmeną $\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+2)}$ iš $x+1$, gautume

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x+2}$$

ir spręstume nelygybę

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x+2} > 0.$$

Jos sprendiniai yra $x \in (-2, 1) \cup (3, +\infty)$. Intervalo $(-2, 1)$ skaičius -1 nelygybės netenkina (vardiklis tampa nuliu). Taigi prastinti šią nelygybę iš $x+1$ galima tik su sąlyga $x \neq -1$.

Panašiai spręsdami nelygybę

$$\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+2)} \leqslant 0,$$

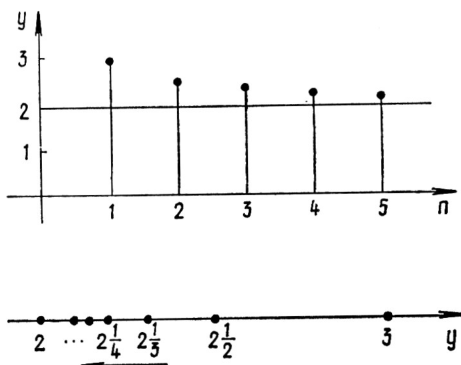
gautume (127 pav.)

$$x \in (-\infty, -2) \cup [1, 3].$$

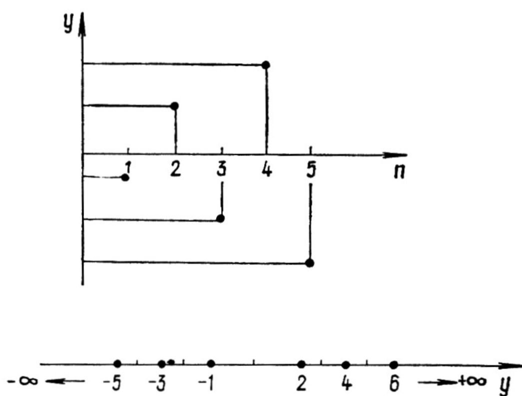
4.14. Sekos riba. Konverguojančios ir diverguojančios sekos

Skaičių seka yra funkcija $f(x)$, kai $x \in N$ (žr. 4.1). Norėdami išsiaiškinti skaičių sekos ribos sąvoką, iš pradžių nubrėžkime keleto sekų grafikus. Kadangi $x \in N$, tai kiekvienas sekos narys gali būti atvaizduotas tašku skaičių tiesėje arba koordinačių sistemoje. Kad būtų patogiau, masteliai ašyse Ox ir Oy gali būti skirtingi. 128—131 paveiksluose grafiškai atvaizduotos sekos $a_n = \frac{2n+1}{n}$, $a_n = (-1)^n n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ir $a_n = \frac{n-1}{3n}$.

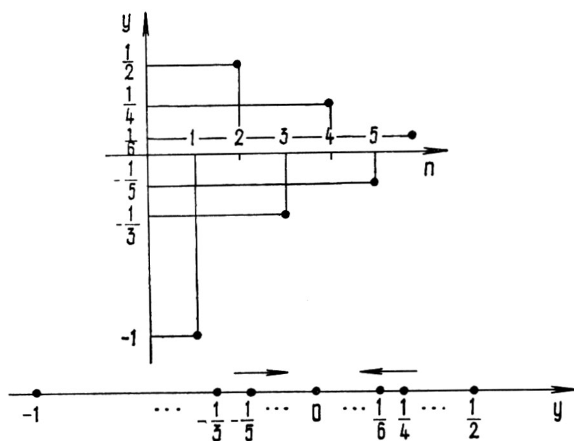
Kaip matome (128 pav.), visi sekos $a_n = \frac{2n+1}{n}$ nariai mažėja. Kai $n \to \infty$, $a_n \to 2$.



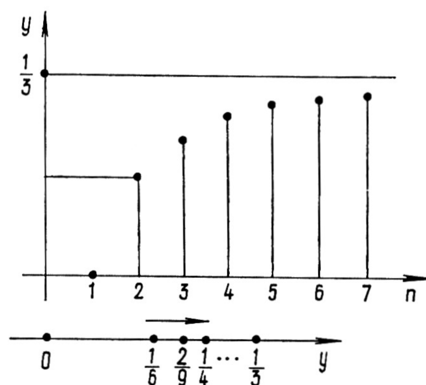
128 pav.



129 pav.



130 pav.



131 pav.

Nagrinėdami sekos $a_n = (-1)^n n$ grafiką (129 pav.), pastebime, kad, kai $n \to \infty$, sekos nariai pakaitomis tampa arba teigiami, arba neigiami. Be to, minėtosios sekos narių moduliai neribotai didėja. Taigi $a_n \to \infty$.

Sekos $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nariai yra teigiami, kai n — lyginis skaičius, ir neigiami, kai n — nelyginis (130 pav.). Be to, kai $n \to \infty$, narių moduliai mažėja. Iš paveikslo intuityviai sprendžiame, kad

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Kai $n \to \infty$, sekos $a_n = \frac{n-1}{3n}$ nariai artėja prie $\frac{1}{3}$, t. y.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{3n} = \frac{1}{3}.$$

Tą galime pastebėti ir 131 paveiksle.

Nagrinėkime skaičių seką $a_n = \frac{n+1}{n}$ išsamiau. Šios sekos bendrasis narys yra

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Kai $n \to \infty$, sekos $1 + \frac{1}{n}$ ir vieneto skirtumo modulis, t. y. $\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$, gali būti mažesnis už bet kokį be galo mažą teigiamą skaičių ε (žr. 4.10). Taigi

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \text{ arba } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Imkime $\varepsilon = 0{,}01$. Tuomet $n > \frac{1}{0{,}01}$, arba $n > 100$. Taigi sekos a_n nariai, pradedant 101-uoju, tenkina nelygybę

$$|a_n - 1| < 0{,}01.$$

Kai $\varepsilon = 0{,}001$, tuomet $n > \frac{1}{0{,}001}$, arba $n > 1000$, ir $|a_n - 1| < 0{,}001$.

Remdamiesi funkcijos ribos apibrėžimu galime užrašyti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Apibrėžimas. *Skaičius a vadinamas sekos (a_n) riba, kai kiekvieną teigiamą skaičių ε atitinka toks natūrinis skaičius N, kad su visais $n > N$ galioja nelygybė $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Kai seka a_n turi ribą a, simboliškai rašome $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Skaičius N priklauso ir nuo pačios sekos, ir nuo pasirinkto ε. Šią priklausomybę žymime $N(\varepsilon)$.

Pavyzdys. Įrodykime

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4n+1}{2n-1} = 2.$$

Remdamiesi sekos apibrėžimu, galime užrašyti:

$$\left| \frac{4n+1}{2n-1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

arba

$$\left| \frac{4n+1-4n+2}{2n-1} \right| < \varepsilon;$$

$$\left| \frac{3}{2n-1} \right| < \varepsilon,$$

arba

$$\frac{3}{2n-1} < \varepsilon;$$

$$n > \frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Taigi $|a_n - 2| < \varepsilon$, kai $n > \frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon}$. Iš čia išplaukia

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon} \right].$$

Imkime $\varepsilon = 0{,}01$. Tada

$$N = \left[\frac{3+0{,}01}{2\cdot 0{,}01} \right] = \left[\frac{3{,}01}{0{,}02} \right] = [150{,}5] = 150.$$

Taigi, kai $\varepsilon = 0{,}01$, $N = 150$ ir

$$\left| \frac{4n+1}{2n-1} - 2 \right| < 0{,}01, \text{ jei } n > 150.$$

Jeigu seka a_n turi ribą, tai ji vadinama *konverguojančia*. Seka, kuri neturi ribos, vadinama *diverguojančia*. Nesunku nustatyti, kad sekos $a_n = \frac{2n-1}{n}$ ir $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ yra konverguojančios, o sekos $a_n = (-1)^n + 2$ ir $a_n = 4n - 1$ — diverguojančios. Jeigu sekos riba lygi nuliui, tai ta seka vadinama *nykstančia*, pavyzdžiui, $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Galima įrodyti, kad *aprėžta ir didėjanti seka turi ribą, kuri yra didesnė už kiekvieną sekos narį; aprėžta ir mažėjanti seka turi ribą, kuri yra mažesnė už kiekvieną sekos narį*. Šio teiginio įrodymas pateikiamas platesniame matematikos kurse.

Pavyzdžiai. Apskaičiuokime sekų ribas.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{1-4n^2}$.

Padaliję trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš n^2 ir pritaikę funkcijų dalmens ribos teoremą, gauname:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{1-4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-4} = \frac{3+0}{0-4} = -\frac{3}{4}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+1}{5n^3+2n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{0-0+0}{5+0-0} = \frac{0}{5} = 0.$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(n+2)^2}{(n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+n^2+4n+4}{n^2+6n+9} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+6n+5}{n^2+6n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}} = \frac{2+0+0}{1+0+0} = 2.$$

4.14.1. Progresijos. *Skaičių seka, kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus pirmesniam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi, vadinama aritmetine progresija.* Tas skaičius vadinamas aritmetinės *progresijos skirtumu* ir žymimas raide d. Norėdami pažymėti, kad skaičių sekos nariai sudaro aritmetinę progresiją, prieš seką rašome ženklą $\div$.

Aritmetinių progresijų pavyzdžiai:

$\div 2, 4, 6, 8, \ldots$ (čia $d=2$),

$\div 5, 2, -1, -4, \ldots$ (čia $d=-3$),

$\div 4{,}5,\ 5,\ 5{,}5,\ 6, \ldots$ (čia $d=\frac{1}{2}$),

$\div 5, 5, 5, 5, \ldots$ (čia $d=0$).

Iš šių pavyzdžių galime daryti išvadą, kad aritmetinė progresija yra didėjanti, jeigu $d>0$, ir mažėjanti, jeigu $d<0$. Kai $d=0$, visi progresijos nariai lygūs, ir progresija yra pastovi seka.

Imkime aritmetinės progresijos n narių (juos žymėsime raide a su atitinkamu indeksu). Taigi

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Remdamiesi aritmetinės progresijos apibrėžimu, galime parašyti $a_2=a_1+d$, $a_3=a_2+d$, $a_4=a_3+d, \ldots$, $a_n=a_{n-1}+d$. Šias lygybes panariui sudėję gauname

$$(a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})+a_n=a_1+(a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})+(n-1)d.$$

Iš čia

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

Gavome aritmetinės progresijos n-ojo nario formulę. Joje a_1 — pirmasis progresijos narys, n — narių skaičius, d — skirtumas.

Pavyzdys. Parašykime progresijos $\div$ $-10, -8, -6, \ldots$ trisdešimtąjį narį.

Šioje progresijoje $a_1 = -10$, $d = -2$, $n = 30$. Taigi

$$a_{30} = a_1 + 29d = -10 - 29 \cdot 2 = -10 - 58 = -68.$$

Aritmetinės progresijos narių savybės.

1. *Kiekvienas aritmetinės progresijos narys, išskyrus pirmąjį ir paskutinį, yra jo gretimų narių aritmetinis vidurkis.*

Iš aritmetinės progresijos apibrėžimo išplaukia, kad

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Imkime paskutinių dviejų skirtumų lygybę $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Iš čia $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$,

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.}$$

Matome, kad aritmetinės progresijos n-asis narys lygus gretimų narių aritmetiniam vidurkiui.

2. *Baigtinės aritmetinės progresijos dviejų narių, vienodai nutolusių nuo pradžios ir pabaigos, suma lygi kraštinių narių sumai.*

Remdamiesi šia savybe apskaičiuosime aritmetinės progresijos n pirmųjų narių sumą S_n. Taigi

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Tą pačią sumą užrašome sukeitę narius vietomis:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Sudėję (1) ir (2) lygybes gauname:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) +$$
$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Suskliaustieji dvinariai yra vienodai nutolusių nuo progresijos pradžios ir pabaigos dviejų narių sumos. Šios sumos yra vienodos. Be to, jų yra n. Taigi

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

arba

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.}$$

Naudodamiesi šia formule, galime apskaičiuoti aritmetinės progresijos n narių sumą, kai žinomi tos progresijos kraštiniai nariai. Šioje formulėje a_n pakeitę išraiška $a_1 + (n-1)d$ gauname:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n,$$

arba

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Pavyzdys. Aritmetinės progresijos antrojo ir ketvirtojo narių suma lygi 16, o pirmojo ir penktojo narių sandauga lygi 28. Raskime pirmąjį narį ir progresijos skirtumą.

Iš sąlygos užrašome

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d = 16, \\ a_1(a_1 + 4d) = 28, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 4d = 16, \\ a_1^2 + 4a_1 d = 28. \end{cases}$$

Išsprendę sistemą keitimo būdu gauname:

$$d_1 = 3,\ d_2 = -3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 14.$$

Naudodamiesi gautomis skirtumo ir pirmojo nario reikšmėmis galime parašyti dvi progresijas:

$$\div\ 2, 5, 8, 11 \ldots; \qquad \div\ 14, 11, 8, 5, \ldots$$

Abi progresijos tenkina uždavinio sąlygą.

Skaičių seka, kurios pirmasis narys nelygus nuliui, o kiekvienas kitas narys, pradedant antruoju, lygus pirmesniam nariui, padaugintam iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus, vadinama geometrine progresija.

Tas skaičius vadinamas geometrinės progresijos vardikliu ir žymimas raide q. Geometrinė progresija žymima ženklu $\div\div$.

Pavyzdžiai. 2, 4, 8, 16, ... (čia $q=2$),

24, 12, 6, 3, ... (čia $q=\frac{1}{2}$),

3, -6, 12, -24, ... (čia $q=-2$).

Geometrinė progresija yra didėjanti, jeigu $|q|>1$, ir mažėjanti, jeigu $|q|<1$. Geometrinės progresijos narius žymėsime raide b su atitinkamu indeksu. Sakykime, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ yra geometrinė progresija. Jos n-ąjį narį galime apskaičiuoti šitaip: $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q$, $b_4 = b_3 q, \ldots, b_n = b_{n-1} q$. Sudauginę panariui šias lygybes, gauname

$$b_2 b_3 b_4 \ldots b_{n-1} b_n = b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} \cdot q^{n-1};$$

$$(b_2 b_3 b_4 \ldots b_{n-1}) b_n = (b_2 b_3 \ldots b_{n-1}) \cdot b_1 q^{n-1}.$$

Kadangi $b_2 b_3 b_4 \ldots b_{n-1} \neq 0$, tai

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Pavyzdys. Raskime progresijos $\div\div\ 5\frac{5}{8}, -3\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, \ldots$ šeštąjį narį.

$$b_6 = b_1 \cdot q^5,\ b_1 = 5\frac{5}{8},\ b_2 = -3\frac{3}{4},$$

$$q = b_2 : b_1 = -3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8} = -\frac{2}{3}.$$

$$b_6 = \frac{45}{8} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{5 \cdot 3^2}{2^3} \cdot \frac{2^5}{3^5} = -\frac{5 \cdot 2^2}{3^3} = -\frac{20}{27}.$$

Iš geometrinės progresijos apibrėžimo išplaukia

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}} \quad \text{arba} \quad q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Sulyginę tų lygybių dešiniąsias puses turime

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

arba

$$b^2_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1};$$

iš čia

$$\boxed{b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.}$$

Dviejų teigiamų skaičių geometrinis vidurkis lygus kvadratinei šakniai iš tų skaičių sandaugos. Pavyzdžiui, 3 ir 5 geometrinis vidurkis yra $\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$.

Taigi bet kuris geometrinės progresijos narys yra jam gretimų narių geometrinis vidurkis.

Raskime geometrinės progresijos $\div\div\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots$ n pirmųjų narių sumą. Pažymėję ją S_n turime:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Šios lygybės abi puses dauginame iš q ir gauname

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q,$$

arba

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q. \qquad (2)$$

Iš (2) lygybės atimame (1):

$$S_n q - S_n = b_n q - b_1;$$

$$S_n (q - 1) = b_n q - b_1,$$

$$\boxed{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}} \quad (\text{kai } q \neq 1).$$

Vietoje b_n įrašome jo išraišką:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1},$$

arba

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Spręsdami uždavinius naudojamės ta formule, kuri atitinka sąlygos duomenis. Tuo atveju, kai $|q|<1$, patogiau naudotis formule

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Pavyzdys. Raskime 4 skaičius, sudarančius mažėjančią geometrinę progresiją, jei kraštinių jos narių suma yra 27, o vidurinių — 18. Iš sąlygos sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} b_1+b_4=27, \\ b_2+b_3=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1+b_1q^3=27, \\ b_1q+b_1q^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q^3)=27, \\ b_1q(1+q)=18. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą gauname

$$b_1=24,\ q=\frac{1}{2}.$$

Taigi mažėjančią geometrinę progresiją sudaro skaičiai

24, 12, 6, 3.

4.14.2. Begalinės mažėjančios geometrinės progresijos narių suma. Geometrinė progresija, kurios

$$|q|<1$$

ir narių skaičius be galo didelis, *vadinama begaline mažėjančia geometrine progresija.* Tokios progresijos n narių suma apskaičiuojama pagal formulę

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Tą formulę užrašome šitaip:

$$S_n=\frac{b_1}{1-q}(1-q^n);$$

čia n — progresijos narių skaičius, taigi $n\in N$. Skaičiuojame abiejų lygybės pusių ribas, kai $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{1-q}(1-q^n).$$

Remiantis teorema apie sandaugos ribą,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n). \quad (1)$$

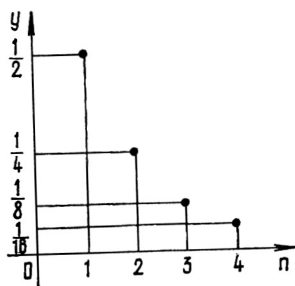
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{1-q}=\frac{b_1}{1-q},$$

nes ši trupmena nuo n nepriklauso.

$$\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}q^n=1-\lim_{n\to\infty}q^n.$$

Kadangi $|q|<1$, tai $\lim_{n\to\infty} q^n=0$.

132 paveiksle galime stebėti sekos $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ kitimą. Matome, kad sekos nariai mažėja artėdami prie nulio, kai $n\to\infty$.



132 pav.

Gautuosius rezultatus įrašome į (1) lygybę:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{b_1}{1-q}.$$

Begalinės mažėjančios geometrinės progresijos narių suma S vadinama tos progresijos pirmųjų n narių sumos riba, kai $n\to\infty$. Sakykime, $\lim_{n\to\infty} S_n=S$. Tada

$$\boxed{S=\frac{b_1}{1-q}.}$$

Šia formule naudojamės reikšdami dešimtaines periodines trupmenas paprastosiomis.

Pavyzdžiai. Dešimtaines periodines trupmenas išreikškime paprastosiomis trupmenomis.

1. $0{,}333\ldots=0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots$

Šią sumą apskaičiuojame naudodamiesi formule $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Šiuo atveju $b_1=0{,}3$, $q=\frac{0{,}03}{0{,}3}=0{,}1$. Taigi

$$S=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{0{,}3}{0{,}9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

Ats. $0{,}333\ldots=\frac{1}{3}$.

2. $7{,}232323\ldots=7+0{,}232323\ldots=7+S$; čia $S=0{,}23+0{,}0023+$ $+0{,}000023+\ldots$

Pritaikę begalinės mažėjančios geometrinės progresijos narių sumos formulę, gauname

$$b_1=0{,}23,\ q=\frac{0{,}0023}{0{,}23}=0{,}01,$$

$$S=\frac{0{,}23}{1-0{,}01}=\frac{0{,}23}{0{,}99}=\frac{23}{99}.$$

Ats. $7{,}232323\ldots=7\frac{23}{99}$.

Taisyklė. *Grynoji periodinė trupmena lygi paprastajai trupmenai, kurios skaitiklis yra pats periodas, o vardiklyje yra tiek devynetų, kiek periode skaitmenų.*

Išreiškime mišriąją periodinę trupmeną paprastąja trupmena:

$$1{,}2888\ldots=\frac{12{,}888\ldots}{10}.$$

Skaitiklį išreiškę paprastąja trupmena pagal pateiktą taisyklę, gauname:

$$1{,}2888\ldots=\frac{12{,}888}{10}=\frac{12\frac{8}{9}}{10}=\frac{12\cdot9+8}{9\cdot10}=\frac{12(10-1)+8}{90}=$$

$$=\frac{120+8-12}{90}=\frac{128-12}{90}=\frac{58}{45}.$$

Taisyklė. *Mišrioji periodinė trupmena lygi paprastajai trupmenai, kurios skaitiklis yra skaičius ligi antrojo periodo be skaičiaus, esančio prieš periodą, o vardiklis yra skaičius, išreikštas skaitmeniu 9, pakartotu tiek kartų, kiek skaitmenų yra periode, su tiek nulių gale, kiek skaitmenų yra tarp kablelio ir pirmojo periodo.*

4.14.3. Skaičius *e*. Nagrinėkime skaičių seką a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., kurios bendrasis narys yra

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad n\in N.$$

Imdami konkrečias n reikšmes, apskaičiuojame sekos narius ir rezultatus surašome į lentelę:

n	1	2	3	4	...	10	100	1000
a_n	2,0000	2,2500	2,3704	2,4414	...	2,5937	2,7048	2,7169

Lentelėje matome, kad didėjant n reikšmėms a_n taip pat didėja. Platesniuose aukštosios matematikos kursuose griežtai įrodoma, kad seka a_n turi ribą. Tą ribą priimta žymėti raide e. Taigi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Skaičius e yra iracionalus. Jis išreiškiamas begaline neperiodine dešimtaine trupmena:

$$e=2{,}718281828\ldots$$

Praktikoje vartojama apytikslė e reikšmė: $e\approx 2{,}72$. Įrodyta, kad $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

4.15. Pratimai

1. Nustatykite funkcijų apibrėžimo sritis:

1) $y=2x+1$; 2) $y=x^2-16$;

3) $y=\sqrt{x^2-49}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-36}}$;

5) $y=\frac{1}{x^2-16}$; 6) $y=\sqrt{x^2+x-2}$;

7) $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}$; 8) $y=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-4}$;

9) $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+2}}+\sqrt{x}$; 10) $y=\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$.

2. Raskite funkcijų reikšmių aibes ir nubrėžkite jų grafikus:

1) $y=2x^2+1$; 2) $y=x^2-2x$;

3) $y=x-x^2$; 4) $y=\frac{1}{x+1}$;

5) $y=\frac{1}{x+1}$; 6) $y=\frac{x}{x-1}$;

7) $y=\sqrt{x}+1$; 8) $y=\sqrt{x}-2$;

9) $y=\frac{1}{x^2+1}$; 10) $y=\frac{1}{x^2}+1$.

3. Iš funkcijų grafikų, pateiktų 133, 134, 135, 136 paveiksluose, nustatykite jų apibrėžimo sritis.

4. Nustatykite, kurios iš funkcijų yra aprėžtos, aprėžtos iš viršaus, aprėžtos iš apačios:

1) $y=|x|$; 2) $y=x^2+1$;

3) $y=-x^2+2$; 4) $y=\frac{2}{1+x^2}$;

5) $y=2x+1$, kai $x\in[0, 2]$; 6) $y=\sqrt{x}$, kai $x\in[0, 4]$.

5. Raskite nurodytųjų funkcijų atvirkštines funkcijas:

1) $y=2x-1$; 2) $y=1-x$;

3) $y=\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{1}{x-1}$;

5) $y=x^3+1$; 6) $y=\sqrt{x+1}$.

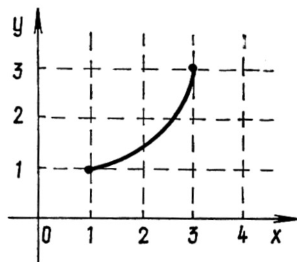
6. Nurodykite, kurios iš šių funkcijų turi atvirkštines:

1) $y=2x-1$; 2) $y=x^2-1$;

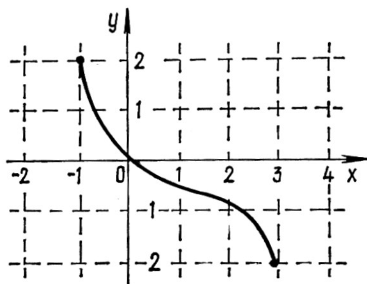
3) $y=(x-1)^2$; 4) $y=x^3$;

5) $y=\frac{1}{x}$; 6) $y=x+\frac{1}{x}$;

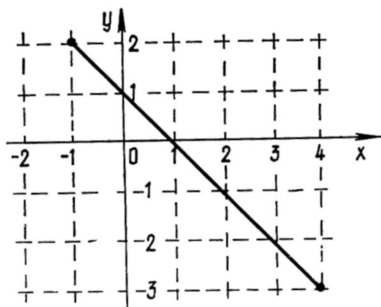
7) $y=\sqrt{x^2}$; 8) $y=(\sqrt{x})^2$.



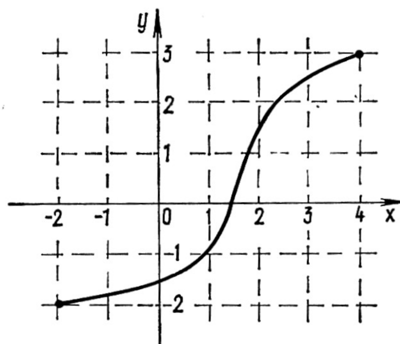
133 pav.



134 pav.



135 pav.



136 pav.

7. Parašykite skaičių sekų bendruosius narius:

1) 1, 4, 9, ...; 2) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;

3) $\frac{3}{5}, \frac{6}{8}, \frac{9}{11}, \ldots$; 4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$;

5) $\frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \ldots$; 6) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$;

7) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}, \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8}, \ldots$

8. Parašykite skaičių sekas, jei žinomi jų bendrieji nariai:

1) $a_n=(n-1)^2+1$; 2) $a_n=2^n-1$;

3) $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n^2}$; 4) $a_n=(-1)^{n-1}\cdot n$;

5) $a_n=\frac{2n+1}{3n-2}$; 6) $a_n=\frac{5n+1}{3n-1}$.

9. Nubrėžkite šių funkcijų grafikus:

1) $y=\begin{cases}-x^2, \text{ kai } x\geqslant 0,\\ x, \text{ kai } x<0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x^3, \text{ kai } x<0,\\ 2, \text{ kai } x\geqslant 0;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}x^2, \text{ kai } x\geqslant 1,\\ -x, \text{ kai } x<1;\end{cases}$ 4) $y=\begin{cases}2x+1, \text{ kai } x\geqslant 0,\\ -x, \text{ kai } x<0;\end{cases}$

5) $y=(x-2)^2$, kai $x\geqslant 2$; 6) $y=[x]$;

7) $y=\{x\}$; 8) $y=|x|$;

9) $y=\frac{1}{|x|}$; 10) $y=|x-1|$;

11) $y=|x+1|$; 12) $y=|x|^3$;

13) $y=|x-2|$.

10. 1) Duota funkcija $y=2x+1$. Pastumkite lygiagrečiai šios funkcijos grafiką: a) per 2 vienetus į viršų; b) per 3 vienetus žemyn; c) per 4 vienetus į dešinę; d) per 3 vienetus į kairę.

2) Duota funkcija $y=-x^2$. Pastumkite ašies Oy kryptimi šį grafiką: a) per 3 vienetus į viršų; b) per 3 vienetus žemyn.

3) Duota funkcija $y=x^2$. Pastumkite jos grafiką ašies Ox kryptimi: a) per 3 vienetus į dešinę pusę; b) per 3 vienetus į kairę pusę.

4) Duota funkcija $y=x^2$. Perkelkite šios funkcijos grafiko viršūnę į tašką $M(2, 3)$ ir parašykite naujojo grafiko — funkcijos analizinę išraišką.

5) Duota funkcija $y=x^2$. Perkelkite šios funkcijos grafiko viršūnę į tašką $M(2, -3)$ ir parašykite naujojo grafiko analizinę išraišką.

6) Duota funkcija $y=(x+2)^2+3$. Perkelkite šios parabolės viršūnę į tašką $M(3, -2)$ ir parašykite naujojo grafiko analizinę išraišką.

11. Nubrėžkite funkcijų grafikus:

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{1}{8}x^3$;

3) $y=\frac{4}{x-2}$; 4) $y=\frac{1}{2}(x-2)^3$;

5) $y=\frac{4}{x+2}$; 6) $y=\frac{1}{8}(x+2)^3$.

N u r o d y m a s. Funkcijos $y=\frac{4}{x-2}$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=\frac{4}{x}$ grafiko lygiagrečiuoju postūmiu per 2 vienetus ašies Ox kryptimi į dešinę pusę.

12. Naudodamiesi lygiagrečiuoju postūmiu, nubrėžkite funkcijų grafikus:

1) $y=-\frac{4}{x}+1$; 2) $y=-\frac{1}{8}x^3+2$;

3) $y=1+\frac{4}{x}$; 4) $y=\frac{1}{8}x^3+2$;

5) $y=-1+\frac{4}{x}$;   6) $y=\frac{1}{8}x^3-2$.

13. Raskite pokyčius šių funkcijų:

1) $y=x^2-2x$,   kai $x_1=2$, $x_2=4$;

2) $y=\sqrt{x}$,   kai $x_1=1$, $x_2=4$;

3) $y=x^2-4x+3$,   kai $x_1=3$, $x_2=4$;

4) $y=\frac{1}{x^2+1}$,   kai $x_1=-1$, $x_2=0$.

14. Raskite funkcijų ribas:

1) $\lim\limits_{x\to m}\frac{ax^2+bx+c}{m}$;   2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3-3x^2}{4x^2-3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$;   4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$;   6) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2+x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-2x^2+x-1)$;   8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+x+1}{4x+1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(3\sqrt[3]{x}-\sqrt{2x^2+4x-5})$;   10) $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt[3]{x^2-2x-35}+2x)$;

11) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$;   12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$;   14) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-6x+9}$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot\frac{x-2}{x}$;   16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{x^2}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-4x^2}{2x^3+1}$;   18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{3x^3-5}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+1}{x^5+x+1}$;   20) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x})$;

21) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$;   22) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$;   24) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$;

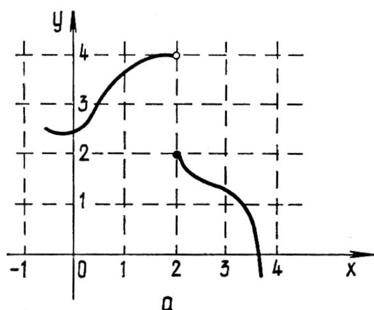
25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x-8}+2}$;   26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}$;

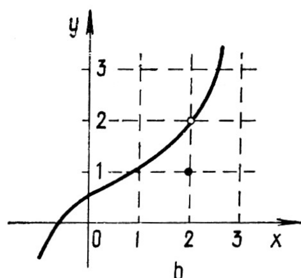
27) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$;   28) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$;

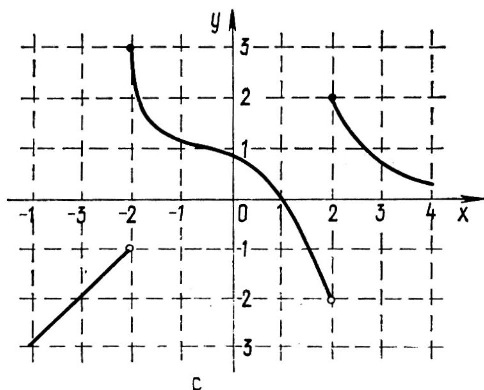
29) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$;   30) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-2x}-1}$;

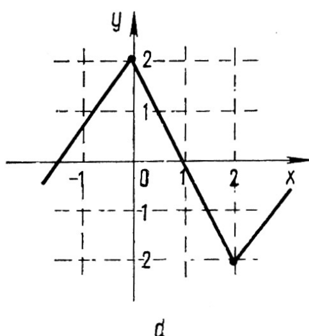
31) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$;   32) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$.

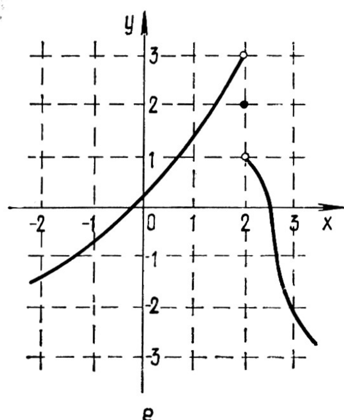
15. 1) 137 paveiksle, *a—f*, pavaizduoti funkcijų grafikai. Kurios iš tų funkcijų yra tolydžios, kurios — trūkios? Nurodykite trūkio taškus ir funkcijos reikšmę trūkio taške.

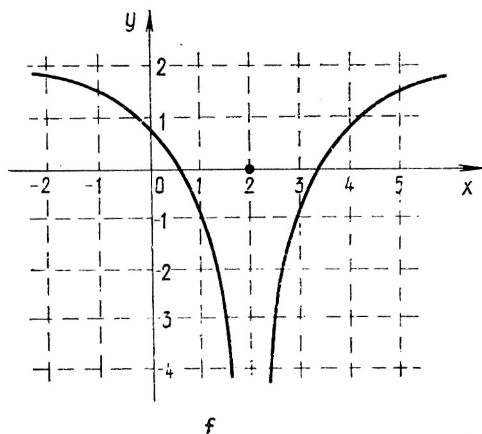












137 pav.

2) Nubrėžkite funkcijų grafikus ir nurodykite, kuriuose taškuose tos funkcijos yra tolydžios ir kuriuose trūkios. Nurodykite funkcijos reikšmę trūkio taške.

a) $y=\begin{cases} x-2, & \text{kai } x>0, \\ x, & \text{kai } x\leqslant 0; \end{cases}$

b) $y=\begin{cases} x-1, & \text{kai } x\leqslant 0, \\ 1-x, & \text{kai } x>0; \end{cases}$

c) $y=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & \text{kai } x\leqslant 2, \\ x, & \text{kai } x>2; \end{cases}$

d) $y=\begin{cases} x^2, & \text{kai } x\geqslant 2, \\ x, & \text{kai } x<2; \end{cases}$

e) $y=\begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{kai } x\leqslant -2, \\ y=x+3, & \text{kai } x>-2; \end{cases}$

f) $y=\begin{cases} \sqrt{x}, & \text{kai } x\geqslant 4, \\ -x, & \text{kai } x<4; \end{cases}$

3) Įrodykite, kad funkcija $y=\frac{2x}{1-x^2}$ yra tolydi, kai $x\in R$, išskyrus $x=\pm 1$. Nubrėžkite tos funkcijos grafiką;

4) Įrodykite, kad funkcija $y=\frac{2x+1}{x}$ yra tolydi, kai $x\in R$, išskyrus $x=0$. Nubrėžkite tos funkcijos grafiką;

5) Įrodykite, kad funkcijos $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ yra tolydžios, kai $x\in[0, +\infty)$;

6) Patikrinkite, ar funkcija $y=\frac{|x|}{x}$ yra tolydi taške $x_0=0$. Nubrėžkite tos funkcijos grafiką;

7) Raskite funkcijų tolydumo intervalus:

a) $y=x^3-2x$; b) $y=\frac{x^4-2x+5}{x^2+1}$;

c) $y=\frac{x^2-4x+3}{x^3-1}$; d) $y=\frac{x^3+27}{x^2+3x}$.

8) Nurodykite funkcijų trūkio taškus:

a) $y=x+\frac{2}{x-1}$; b) $y=\frac{3}{2-x}$;

c) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$; d) $y=2-\frac{1}{x}$;

9) Išspręskite nelygybes intervalų metodu:

a) $\frac{x-2}{x+4}<0$; b) $\frac{x+3}{x-2}\geqslant 0$;

c) $(x-1)(x-2)>0$; d) $x^2+x-2\leqslant 0$;

e) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}\geqslant 0$; f) $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-6x+5}<0$;

g) $\frac{x^2-6x+8}{x^2+x+1}<0$; h) $\frac{x^2+2x+4}{x^2-7x+12}\geqslant 0$;

i) $\frac{3x^2-17x+18}{x^2-5x+4}<2$; j) $\frac{3x^2-14x+14}{x^2-4x+3}>2$;

k) $\dfrac{(x^3+1)(x^2-4x+3)}{x^2-6x+8}>0$; l) $\dfrac{(x^3-1)(x^2+5x-6)}{(x^3+8)(x-3)}<0$.

16. 1) Parašykite bendruosius narius šių skaičių sekų:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$; b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$;

c) $\frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{13}{14}, \ldots$;

2) Parašykite skaičių sekas, kai jų bendrieji nariai yra šie:

a) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$; b) $a_n=\dfrac{n^2}{2n+1}$;

c) $a_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; d) $a_n=\dfrac{4n+3}{2n-1}$;

3) Raskite natūrinių skaičių sumą

$$1+2+3+\ldots+n;$$

4) a) Tarp skaičių 3 ir 24 įrašykite 6 skaičius, kurie kartu su tais skaičiais sudarytų aritmetinę progresiją;

b) $a_3=25$, $a_{10}=-3$. Raskite a_1, d;

c) $a_1=2$, $d=2$, $n=40$. Raskite a_n, S_n;

d) $a_1=10$, $a_n=-9$, $S_n=10$. Raskite d ir n;

e) Alpinistas, kopdamas į viršukalnę, pirmą dieną pasiekė 900 m aukštį, o kiekvieną kitą dieną jis užlipdavo 50 m mažiau negu pirmą dieną. Po kelių dienų jis įkopė į 5200 m kalno viršūnę?

5) a) Raskite geometrinės progresijos $\div\!\div$ 2, 1, $\frac{1}{2}$, ... dešimtąjį narį;

b) Raskite geometrinės progresijos $\div\!\div$ $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 1, $\frac{\sqrt{6}}{2}$, ... penkių narių sumą;

c) Tarp skaičių 1 ir 256 įrašykite 3 skaičius, kurie kartu su tais skaičiais sudarytų geometrinę progresiją;

d) $b_1-b_2=8$, $b_2+b_3=12$. Parašykite tą progresiją;

e) Parašykite 4 narių geometrinę progresiją, jeigu $b_1+b_4=28$ ir $b_2+b_3=12$;

f) Raskite geometrinės progresijos 6 pirmųjų narių sumą, jeigu $b_1\cdot b_3=\frac{1}{144}$, $b_3+b_4=1$.

4.16. Atsakymai

1. 1) $x\in R$; 2) $x\in R$; 3) $|x|\geqslant 7$; 4) $|x|>6$; 5) $|x|\neq 4$; 6) $x\in(-\infty, -2]\cup[1, +\infty)$; 7) $|x|\geqslant 1$; 8) $x<1$, $x\in[3, 4)\cup(4, +\infty)$; 9) $x\in[0, \frac{1}{2})\cup(2, +\infty)$; 10) $x>-1$. **14.** 1) $\dfrac{am^2+bm+c}{m}$; 2) $-\frac{5}{7}$; 3) 3; 4) 12; 5) $\frac{2}{7}$; 6) $\frac{8}{9}$; 7) 3; 8) ∞; 9) 0; 10) 2; 11) $-\frac{1}{2}$; 12) 2,5; 13) 3; 14) 6; 15) 12; 16) 3; 17) $-\frac{1}{2}$; 18) $-\frac{1}{6}$; 19) $\frac{1}{2}$; 20) -1; 21) $\frac{1}{2}$; 22) $\sqrt{2}$. **15.** 9) a) $x\in(-4, 2)$; b) $x\in$

$\in(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$; c) $x\in(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; d) $x\in[-2, 1]$; e) $x\in$ $\in(-\infty, 1) \cup [2, 3] \cup (4, +\infty)$; f) $x\in(\frac{1}{2}, 1) \cup (2, 5)$; g) $x\in(2, 4)$; h) $x\in$ $\in(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$; i) $x\in(1, 2) \cup (4, 5)$; j) $x\in(-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$; k) $x\in(-1, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$; l) $x\in(-\infty, -6) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$.

5. LAIPSNINĖ, RODIKLINĖ IR LOGARITMINĖ FUNKCIJOS

5.1. Laipsnis su bet kuriuo realiuoju rodikliu

Laipsnius su racionaliaisiais rodikliais nagrinėjome 8 klasėje. Priminsime pagrindines taisykles, kurios taikomos atliekant veiksmus su minėtaisiais laipsniais.

Sakykime, a, $b\in R$, o r, r_1, $r_2\in Q$. Tada

1) $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$;
2) $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1 r_2}$;
3) $(ab)^r=a^r b^r$;
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$.

Be to, galioja šios nelygybės:

1) jeigu $a>1$ ir $r_1<r_2$, tai $a^{r_1}<a^{r_2}$;
2) jeigu $a\in(0, 1)$ ir $r_1<r_2$, tai $a^{r_1}>a^{r_2}$;
3) jeigu $a<b$ ir $r>0$, tai $a^r<b^r$;
4) jeigu $a<b$ ir $r<0$, tai $a^r>b^r$.

Norint išsiaiškinti laipsnio su realiuoju rodikliu sąvoką, reikia paaiškinti laipsnio su iracionaliuoju rodikliu prasmę, pavyzdžiui,

$$2^{\sqrt{7}}.$$

Čia rodiklis $\sqrt{7}$ yra iracionalusis skaičius, kurį galima išreikšti begaline neperiodine dešimtaine trupmena:

$$\sqrt{7}=2{,}6457\ldots$$

Skaičiuotuvu randame:

$$2^{2,6}\approx 6{,}06287,$$
$$2^{2,64}\approx 6{,}23332,$$
$$2^{2,645}\approx 6{,}25496,$$
$$2^{2,6457}\approx 6{,}25799,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Matome, kad gautieji skaičiai sudaro didėjančią seką, aprėžtą iš viršaus. Tie skaičiai negali būti didesni už $2^{2,7}=6,49802$, nes $\sqrt{7}<2,7$. Kiekviena didėjanti aprėžta iš viršaus seka turi ribą (žr. 4.13), todėl $2^{\sqrt{7}}$ galima apibrėžti kaip laipsnių sekos $2^{z_1}, 2^{z_2}, \ldots, 2^{z_n}, \ldots$ ribą, t. y.

$$2^{\sqrt{7}}=\lim_{z_n\to 7} 2^{z_n}=6,25821\ldots$$

Panašiai apibrėžtume bet kokio teigiamojo skaičiaus a laipsnį su iracionaliuoju rodikliu.

Apibrėžimas. *Jeigu* $a>0$, *o* γ — *iracionalusis skaičius, tai laipsniu* a^γ *vadiname laipsnių sekos* $a^{z_1}, a^{z_2}, \ldots, a^{z_n}, \ldots$ *ribą, kai* $z_1, z_2 \ldots, z_n$ — *kokia nors racionaliųjų skaičių seka, kurios riba lygi* γ.

Galima įrodyti, kad laipsniai su iracionaliaisiais rodikliais turi tas pačias savybes kaip ir laipsniai su racionaliaisiais rodikliais. Laipsniai su racionaliaisiais rodikliais ir laipsniai su iracionaliaisiais rodikliais sudaro laipsnius su realiaisiais rodikliais. Taigi laipsniams su realiaisiais rodikliais galioja tos pačios taisyklės kaip ir laipsniams su racionaliaisiais rodikliais. Jeigu $\alpha, \beta \in R$ ir $a>0$, $b>0$, tai:

1) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$,

2) $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$,

3) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$,

4) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$,

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$,

6) jeigu $a>1$ ir $\alpha_1<\alpha_2$, tai $a^{\alpha_1}<a^{\alpha_2}$,

7) jeigu $a\in(0, 1)$ ir $\alpha_1<\alpha_2$, tai $a^{\alpha_1}>a^{\alpha_2}$,

8) jeigu $a<b$ ir $\alpha>0$, tai $a^\alpha<b^\alpha$,

9) jeigu $a<b$ ir $\alpha<0$, tai $a^\alpha>b^\alpha$.

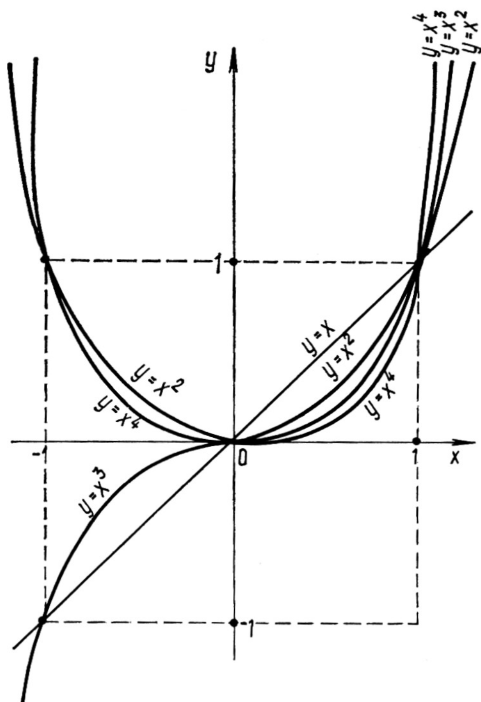
5.2. Laipsninė funkcija

Funkcija $y=x^\alpha$, $\alpha\in R$, vadinama *laipsnine*. Čia x yra argumentas, α — laipsnio rodiklis. Pavyzdžiui, $y=x^2$, $y=x^{-3}$, $y=x^{\frac{2}{3}}$ yra laipsninės funkcijos. Nagrinėsime kai kurias laipsnines funkcijas.

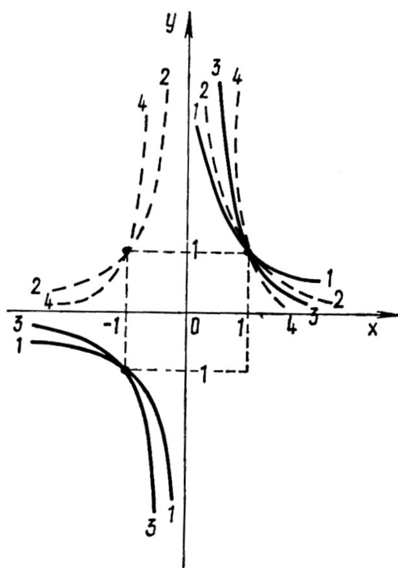
5.2.1. Laipsninė funkcija su natūriniu rodikliu. Kai $\alpha\in N$, turime funkcijas $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$ ir t. t. Šias funkcijas nagrinėjome 4 skyriuje. Susisteminkime žinias apie minėtąsias funkcijas. Jų grafikai pateikti 138 paveiksle. Nagrinėjant grafikus išryškėja pagrindinės tų funkcijų savybės.

1. Funkcijų $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$ ir t. t. apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė, t. y. $x \in R$.

2. Funkcijų $y=x^2$, $y=x^4$ kitimo sritis yra $y \geqslant 0$, o funkcijų $y=x$, $y=x^3$ — visa realiųjų skaičių aibė, t. y. $y \in R$.



138 pav.



139 pav.

3. Kai rodiklis α lyginis, laipsninė funkcija yra lyginė, kai rodiklis α nelyginis — nelyginė. Pirmuoju atveju grafikai yra simetriški ašies Oy atžvilgiu, antruoju — simetriški koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

4. Lyginės funkcijos ($y=x^2$, $y=x^4$) mažėja intervale $(-\infty, 0)$ ir didėja intervale $(0, +\infty)$; nelyginės funkcijos ($y=x$, $y=x^3$) didėja visoje savo apibrėžimo srityje, t. y. $x \in R$.

5. Kai $x=1$, $x^\alpha=1$; tai vaizduoja visų funkcijų grafikų bendras susikirtimo taškas.

6. Argumentui kintant nuo 0 iki $1 (0<x<1)$, funkcijos grafikas yra tuo žemiau tiesės $y=x$, kuo didesnis rodiklis α; kai $x>1$, funkcijos grafikas yra tuo aukščiau tiesės $y=x$, kuo didesnis rodiklis α.

5.2.2. Laipsninė funkcija, kai rodiklis yra sveikasis neigiamas skaičius. Nagrinėjame funkcijas $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$, $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $y=x^{-3}=$

$=\frac{1}{x^3}$. Šių funkcijų grafikai pateikti 139 paveiksle. Suformuluokime pagrindines minėtų funkcijų savybes.

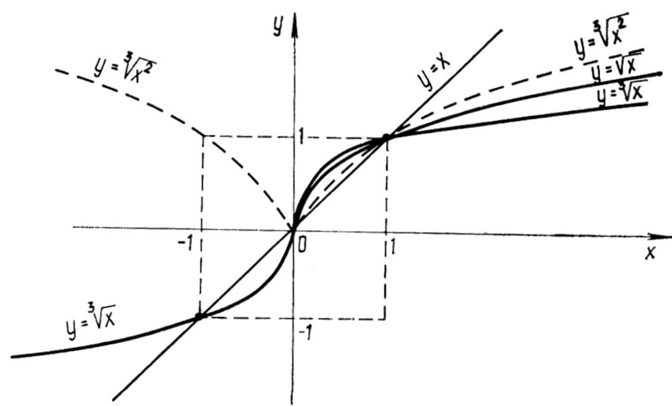
1. Funkcijų $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^3}$ apibrėžimo sritis yra visi realieji skaičiai, išskyrus nulį ($x\neq 0$). Taške $x=0$ funkcijos turi trūkį, nes jame jos neapibrėžtos.

2. Funkcijos $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^4}$ intervale $x\in(-\infty, 0)$ didėja, o intervale $x\in(0, +\infty)$ mažėja; funkcijos $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^3}$ intervaluose $(-\infty, 0)$ ir $(0, +\infty)$ yra mažėjančios.

3. Kai rodiklis α yra lyginis, funkcija yra lyginė, kai α nelyginis, funkcija nelyginė.

4. Lyginių funkcijų grafikai kertasi taškuose $(1, 1)$ ir $(-1, 1)$, nelyginių funkcijų grafikai kertasi taškuose $(1, 1)$ ir $(-1, -1)$. Taškas $(1, 1)$ yra bendras visoms laipsninėms funkcijoms su sveikuoju neigiamu rodikliu, $O(0, 0)$ — trūkio taškas.

5. Intervale $[-1, 1]$ funkcijų grafikai yra tuo arčiau ašies Oy, kuo laipsnio rodiklis yra mažesnis; intervaluose $(-\infty, -1)$ ir $[1, +\infty)$ funkcijų grafikai yra tuo arčiau ašies Ox, kuo laipsnio rodikliai yra didesni.



140 pav.

5.2.3. Laipsninė funkcija su trupmeniniu rodikliu. Imkime funkcijas $y=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$, $y=x^{1/2}=\sqrt{x}$ ir $y=x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$. Šių funkcijų grafikai pavaizduoti 140 paveiksle. Suformuluokime minėtųjų funkcijų pagrindines savybes.

1. Funkcija $y=\sqrt{x}$ yra apibrėžta, kai $x\geqslant 0$, o funkcijos $y=\sqrt[3]{x}$ ir $y=\sqrt[3]{x^2}$ apibrėžtos, kai $x\in R$.

2. Funkcijos $y=\sqrt[3]{x}$ ir $y=\sqrt{x}$ yra didėjančios savo apibrėžimo srityje. Funkcija $y=\sqrt[3]{x^2}$ intervale $(-\infty, 0]$ yra mažėjanti, o intervale $[0, +\infty)$ — didėjanti.

3. Funkcija $y=\sqrt[3]{x^2}$ yra lyginė, jos grafikas simetriškas ašies Oy atžvilgiu. Funkcija $y=\sqrt[3]{x}$ — nelyginė, jos grafikas simetriškas taško $O(0, 0)$ atžvilgiu. Funkcija $y=\sqrt{x}$ yra nei lyginė, nei nelyginė. Jos grafikas nėra simetriškas ašies Oy atžvilgiu arba taško $O(0, 0)$ atžvilgiu.

4. Visų funkcijų su trupmeniniais rodikliais grafikų bendri taškai yra $(1, 1)$ ir $(0, 0)$.

5. Intervale $[0, 1]$ funkcijos grafikas yra tuo aukščiau tiesės $y=x$, kuo mažesnis rodiklis $\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{2}{3}$. Intervale $[1, +\infty)$ funkcijos grafikas yra tuo žemiau tiesės $y=x$, kuo mažesnis laipsnio rodiklis.

5.3. Rodiklinė funkcija

Radioaktyviosios medžiagos irimo formulė yra

$$M=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}};$$

čia M — medžiagos masės M_0 liekana po laiko t, T — laikas, per kurį medžiagos kiekis sumažėja dvigubai.

Gyventojų skaičius miestuose arba valstybėse apytiksliai kinta pagal dėsnį

$$N(t)=N_0a^t;$$

čia N — gyventojų skaičiaus pokytis per laiką t, N_0 — pradinis gyventojų skaičius, $a=\text{const}$.

Rentgeno spindulių intensyvumas, priklausomai nuo medžiagos sluoksnio storio, pro kurį jie praeina, išreiškiamas formule

$$I_x=I_0e^{-\mu x};$$

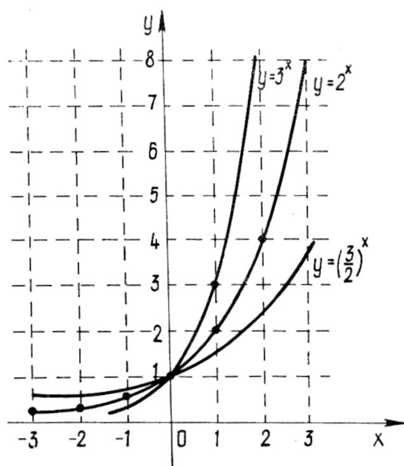
čia I_0 — pradinis intensyvumas, $e\approx 2{,}718\ldots$, μ — skvarbumo koeficientas, x — medžiagos, pro kurią praeina spinduliai, storis.

Minėtieji ir panašūs procesai aprašomi

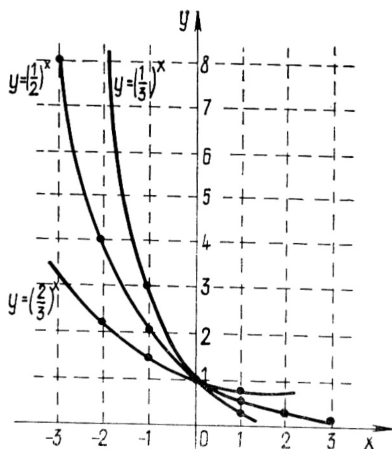
$$\boxed{y=a^x}$$

pavidalo funkcijomis. Tai vadinamoji *rodiklinė funkcija.* Ji nagrinėjama, kai $a>0$ ir $a\neq 1$.

Kai $a=1$, tai $a^x=1$, todėl šis atvejis nenagrinėjamas. Plačiau nagrinėsime funkciją $y=2^x$. Tuo tikslu sudarome lentelę ir nubraižome šios funkcijos grafiką (141 pav.). Lentelėje kai kurios y reikšmės yra apytikslės.



141 pav.



142 pav.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,12	0,18	0,25	0,35	0,50	0,71	1	1,41	2	2,83	4	5,66	8

Iš funkcijos 2^x grafiko matyti, kad $2^x \in R^+$, kai $x \in R$. Įrodysime, kad ši funkcija yra tolydi su bet kokiomis argumento reikšmėmis. Suteikus argumentui pokytį Δx, funkcija įgyja pokytį Δy:

$$y+\Delta y=2^{x+\Delta x}.$$

Randame funkcijos pokytį Δy:

$$\Delta y=2^{x+\Delta x}-2^x=2^x \cdot 2^{\Delta x}-2^x=2^x(2^{\Delta x}-1).$$

Skaičiuojame pokyčio Δy ribą:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2^x(2^{\Delta x}-1)=\lim_{\Delta x\to 0}2^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(2^{\Delta x}-1).$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}2^x=2^x$, nes 2^x nuo Δx nepriklauso. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2^{\Delta x}-1)=0$, nes galima įrodyti, kad $|2^{\Delta x}-1|<\varepsilon$ (žr. 4.10). Taigi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Funkcija $y=2^x$ yra tolydi (žr. 4.12).

Panašiai galima įrodyti, kad visos rodiklinės funkcijos, kai $a>1$, yra tolydžios.

Pateiksime funkcijos $y=a^x$ pagrindines savybes.

1. Funkcijos apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė, t. y. $x \in R$.

2. Funkcijos kitimo sritis — tik teigiamųjų skaičių aibė, t. y. $y \in R^+$.

3. Kai $a>1$, funkcija a^x yra didėjanti.

Sakykime $x_2>x_1$ ir $y_1=a^{x_1}$, $y_2=a^{x_2}$. Parašykime skirtumą

$$y_2-y_1=a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1).$$

Skaičius x_2-x_1 yra teigiamas, vadinasi, $a^{x_2-x_1}-1$ taip pat teigiamas, nes didesnio už vienetą skaičiaus teigiamas laipsnis yra didesnis už vienetą. Taigi $a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>0$, arba $y_2-y_1>0$. Tai reiškia, kad $y_2>y_1$.

4. Funkcija a^x yra nei lyginė, nei nelyginė.

5. Kai $x<0$, $a^x<1$; kai $x=0$, $a^x=1$; kai $x>0$, $a^x>1$.

6. Funkcija a^x yra tolydi (tai įrodėme).

Dabar nagrinėsime rodiklines funkcijas, kai $0<a<1$. Imkime funkcijas

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x,\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ir } y=\left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Šių funkcijų grafikai pavaizduoti 142 paveiksle.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	5,66	4	2,83	2	1,41	1	0,71	0,50	0,35	0,25	0,18	0,13

Nagrinėdami pačią funkciją $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ bei remdamiesi jos grafiku, galime suformuluoti pagrindines jos savybes.

1. Funkcijos apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė, t. y. $x\in R$.

2. Funkcijos kitimo sritis yra teigiamųjų skaičių aibė, t. y. $y\in R^+$.

3. Kai $0<a<1$, funkcija a^x savo apibrėžimo srityje yra mažėjanti. Tą rodo ir jos grafikas, žiūrint į jį iš kairės į dešinę.

4. Funkcija a^x yra nei lyginė, nei nelyginė.

5. Kai $x<0$, $a^x>1$; kai $x=0$, $a^x=1$; kai $x>0$, $a^x<1$.

6. Funkcija yra tolydi. Įrodoma panašiai kaip ir tuo atveju, kai $a>1$.

Remdamiesi abiejų rodiklinių funkcijų grafikais galime tvirtinti: kai $a>1$, $a^x\to+\infty$, kai $x\to+\infty$, ir $a^x\to 0$, kai $x\to-\infty$. Tuo atveju, kai $0<a<1$, $a^x\to 0$, kai $x\to+\infty$, ir $a^x\to+\infty$, kai $x\to-\infty$.

5.4. Logaritmo apibrėžimas

Pagal laipsnio apibrėžimą lygybėje $2^3=8$ skaičius 3 yra laipsnio rodiklis, kuriuo pakėlę 2 gauname 8. Lygybėje $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ skaičius -2 yra laipsnio rodiklis, kuriuo pakėlę $\frac{1}{2}$ gauname 4. Lygybėje $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$ nulis yra laipsnio rodiklis, kuriuo pakėlę $\frac{2}{3}$ gauname 1.

Apskritai lygybėje $a^n = b$ n yra laipsnio rodiklis, kuriuo reikia pakelti skaičių a norint gauti skaičių b. Rodiklis n vadinamas skaičiaus b logaritmo pagrindu a.

Apibrėžimas. *Skaičiaus N logaritmu pagrindu a ($a>0$, $a \neq 1$) vadinamas rodiklis laipsnio, kuriuo reikia pakelti pagrindą norint gauti tą skaičių.*

Skaičiaus N logaritmas pagrindu a žymimas $\log_a N$. Iš logaritmo apibrėžimo išplaukia: jeigu $a^n = N$, tai

$$\log_a N = n.$$

Šioje lygybėje $a>0$, $a \neq 1$ ir $N>0$.

Remdamiesi logaritmo apibrėžimu, galime užrašyti šias lygybes:

1. $2^3 = 8$, $\log_2 8 = 3$;
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$, $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$;
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$, $\log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$;
4. $2^x = 16$, $x = \log_2 16 = 4$;
5. $3^x = 27$, $x = \log_3 27 = 3$;
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$, $x = \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$.

Galime įrodyti, kad iš lygybės

$$a^m = b, \text{ kai } a>0,\ a \neq 1, \qquad (1)$$

išplaukia

$$m = \log_a b. \qquad (2)$$

Iš (2) lygybės, įrašę m reikšmę į (1), gauname tapatybę

$$\boxed{a^{\log_a b} = b.} \qquad (3)$$

Pavyzdžiai. Naudodamiesi (3) tapatybe, apskaičiuokime šiuos reiškinius:

1. $5^{\log_5 4} = 4$;
2. $25^{\log_5 3} = (5^2)^{\log_5 3} = (5^{2\log_5 3}) = 3^2 = 9$;
3. $2^{\log_8 5} = (8^{\frac{1}{3}})^{\log_8 5} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$;
4. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 2} = (3^{-2})^{-2\log_3 2} = 3^{4\log_3 2} = 2^4 = 16$.

5.5. Logaritminė funkcija

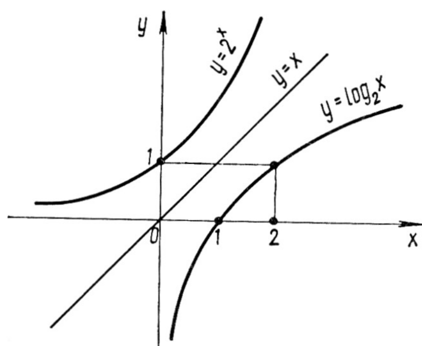
Imkime rodiklinę funkciją $y=a^x$. Pagal atvirkštinės funkcijos radimo taisyklę funkcijai $y=a^x$ atvirkštinė funkcija yra vadinamoji *logaritminė funkcija*

$$x=\log_a y.$$

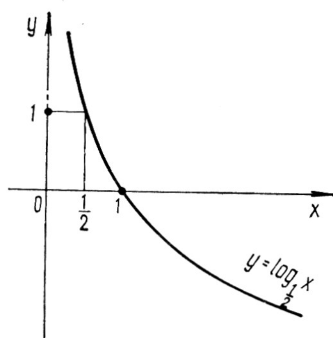
Pažymėję, kaip įprasta, argumentą y raide x ir funkciją x raide y, gauname

$$y=\log_a x, \quad a>0, \quad a\neq 1.$$

Kadangi logaritminė funkcija yra atvirkštinė rodiklinei funkcijai $y=a^x$, tai jų grafikai simetriški tiesės $y=x$ atžvilgiu. Pavyzdžiui, funkcijos $y=2^x$ grafiką atvaizdavę simetriškai tiesės $y=x$ atžvilgiu, gauname funkcijos $y=\log_2 x$ grafiką (žr. 143 pav.).



143 pav.



144 pav.

Pateiksime kai kurių konkrečių logaritminių funkcijų, kai $a>1$, savybes.

1. Funkcijos $y=\log_2 x$ apibrėžimo sritis yra teigiamųjų skaičių aibė. Kitaip tariant, neigiamųjų skaičių logaritmai neegzistuoja.
2. Funkcijos $y=\log_2 x$ kitimo sritis yra realiųjų skaičių aibė, t. y. $y\in R$.
3. Kai $a>1$, funkcija $y=\log_a x$ yra didėjanti. Tai matome ir 143 paveiksle.
4. Funkcija $y=\log_2 x$ yra nei lyginė, nei nelyginė. Jos apibrėžimo sritis nėra simetriška taško O atžvilgiu. Be to, ji netenkina vienos iš lygybių $f(-x)=f(x)$ arba $f(-x)=-f(x)$.
5. Kai $0<x<1$, $y<0$; kai $x=1$, $y=0$; kai $x>1$, $y>0$.
6. Funkcija $y=\log_2 x$ yra atvirkštinė funkcijai $y=2^x$. Kadangi funkcija $y=2^x$ tolydi, tai ir jai atvirkštinė turi būti tolydi.

Kitų funkcijų, kurių $a>1$, pagrindinės savybės yra panašios, todėl jų čia nepateiksime.

Viena iš funkcijų, kurios $0<a<1$, t. y. funkcija $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, pavaizduota 144 paveiksle. Todėl, kad būtų aiškiau suformuluosime jos

pagrindines savybes. Panašias savybes turi ir kitos logaritminės funkcijos, kurių $0<a<1$.

1. Funkcijos apibrėžimo sritis yra visa realiųjų teigiamų skaičių aibė, t. y. $x \in R^{+}$.
2. Funkcijos kitimo sritis yra visų realiųjų skaičių aibė, t. y. $y \in R$.
3. Funkcija yra mažėjanti. Tą rodo ir jos grafikas.
4. Funkcija yra nei lyginė, nei nelyginė.
5. Kai $0<x<1$, $y>0$; kai $x=1$, $y=0$; kai $x>1$, $y<0$.
6. Funkcija $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ yra tolydi savo apibrėžimo srityje.

5.6. Pagrindinės logaritmų savybės

Esame aiškinę, kaip rasti skaičiaus logaritmą kuriuo nors pagrindu (žr. 5.4). Dabar paaiškinsime logaritmų savybes, kuriomis remdamiesi galime rasti įvairių reiškinių logaritmus.

1. Vieneto logaritmas bet kuriuo pagrindu lygus nuliui, t. y. $\log_a 1=0$, nes $a^0=1$.
2. Logaritmo pagrindo logaritmas lygus vienetui, t. y. $\log_a a=1$, nes $a^1=a$.
3. Jeigu $\log_a x_1=\log_a x_2$, tai $x_1=x_2$.
4. Jeigu $x_1=x_2>0$, tai $\log_a x_1=\log_a x_2$.
5. Teigiamųjų skaičių sandaugos logaritmas yra lygus dauginamųjų logaritmų sumai.

Sakykime,

$$x_1=a^{\log_a x_2} \quad \text{ir} \quad x_2=a^{\log_a x_1},$$

tada

$$x_1 \cdot x_2=a^{\log_a x_1+\log_a x_2}.$$

Pagal logaritmo apibrėžimą

$$\boxed{\log_a x_1 x_2=\log_a x_1+\log_a x_2.}$$

Ši savybė galioja esant bet kuriam dauginamųjų skaičiui.

Pavyzdys. Išlogaritmuokime

$$y=5mn \sin \alpha.$$

$$\log_a y=\log_a 5+\log_a m+\log_a n+\log_a \sin \alpha.$$

6. Teigiamųjų skaičių dalmens logaritmas lygus dalinio ir daliklio logaritmų skirtumui, t. y.

$$\boxed{\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2.}$$

Šią savybę siūlome įrodyti patiems moksleiviams.

Pavyzdys. Raskime dalmens $y=\frac{3mn}{4kl}$ logaritmą.

Pirmiausia taikome dalmens logaritmo savybę:

$$\log_a y=\log_a 3mn-\log_a 4kl,$$

po to — sandaugos logaritmo savybę ir gauname

$$\log_a y=\log_a 3+\log_a m+\log_a n-\log_a 4-\log_a k-\log_a l.$$

7. Laipsnio teigiamu pagrindu logaritmas lygus laipsnio rodikliui, padaugintam iš pagrindo logaritmo, t. y.

$$\log_a x^n=n\log_a x.$$

Iš tikrųjų, jeigu

$$x=a^{\log_a x},$$

tai

$$x_n=a^{n\log_a x}.$$

Pritaikę logaritmo apibrėžimą, turime

$$\boxed{\log_a x^n=n\log_a x.}$$

Pavyzdžiai. Išlogaritmuokime:

1. $\log_a x^2=2\log_a x$;
2. $\log_a x^3=3\log_a x$;
3. $\log_a 3x^4=\log_a 3+4\log_a x$;
4. Raskime reiškinio

$$y=\frac{3m^2n^5}{4k^3}$$

logaritmą (išlogaritmuokime). Taikome sandaugos, dalmens ir laipsnio logaritmų savybes:

$$\log_a y=\log_a 3+2\log_a m+5\log_a n-\log_a 4-3\log_a k.$$

8. Šaknies logaritmas lygus pošaknio skaičiaus logaritmui, padalytam iš šaknies rodiklio, t. y.

$$\boxed{\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x.}$$

Kadangi $\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$, tai

$$\log_a\sqrt[n]{x}=\log_a x^{1/n}=\frac{1}{n}\log_a x.$$

Pavyzdžiai. Raskime logaritmus:

1. $\log_a\sqrt{m}=\frac{1}{2}\log_a m$;
2. $\log_a\sqrt[3]{m}=\frac{1}{3}\log_a m$;
3. $\log_a\sqrt[4]{x^3}=\frac{3}{4}\log_a x$;
4. $\log_a\sqrt[5]{a+b}=\frac{1}{5}\log_a(a+b)$.

Išlogaritmuokime reiškinį

$$y=\frac{\pi a^2\sqrt[3]{b^2c}}{\sqrt[5]{d^2e^3}}$$

pagrindu a:

$$\log_a y=\log_a\pi+2\log_a a+\frac{2}{3}\log_a b+\frac{1}{3}\log_a c-\frac{2}{5}\log_a d-\frac{3}{5}\log_a e.$$

Veiksmas, kuriuo randame reiškinį, kai žinomas jo logaritmas, vadinamas *potencijavimu*, arba *antilogaritmavimu*. Šis veiksmas yra atvirkščias logaritmavimui. Rasime reiškinius, kai žinomi jų logaritmai.

1. $\log_c x=\log_c a+\log_c b$; $\quad x=ab.$

2. $\log_c x=\log_c a-\log_c b$; $\quad x=\frac{a}{b}.$

3. $\log_c x=2\log_c a+3\log_c b$; $\quad x=a^2b^3.$

4. $\log_c x=3\log_c a-\frac{1}{2}\log_c b$; $\quad x=\frac{a^3}{\sqrt{b}}.$

5. $\log_m x=\frac{2}{3}\log_m a+\frac{3}{4}\log_m b-\frac{4}{5}\log_m c$; $\quad x=\frac{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[5]{c^4}}.$

6. $\log_m x=2\log_m a-\frac{3}{4}(\log_m b-\log_m c)$; $\quad x=\frac{a^2}{\sqrt[4]{\left(\frac{b}{c}\right)^3}}.$

7. $\log_m x=-\frac{2}{3}\left(2\log_m a+\frac{1}{3}\log_m b\right)$; $\quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{(a^2\sqrt[3]{b})^2}}.$

5.7. Dešimtainiai logaritmai

Logaritmas, kurio pagrindas yra skaičius 10, vadinamas *dešimtainiu*. Jį žymėsime

$$\boxed{\log_{10}x=\lg x.}$$

Patogiausia įvairių skaičių dešimtainius logaritmus rasti skaičiuotuvu.

Pavyzdžiai. Naudodamiesi skaičiuotuvu įsitikinsime, kad šios apytikslės lygybės yra teisingos.

1. $\lg 2\approx0{,}30103$. Skaičiuojame šitaip:

2 [F] [lg]

2. $\lg 3789\approx3{,}57852$. Skaičiavimo tvarka:

3789 [F] [lg]

3. $\lg 0{,}003789 \approx -2{,}42148$. Kad ši lygybė teisinga, galima įsitikinti pritaikius dešimtainio logaritmo apibrėžimą ir atlikus skaičiuotuvu šiuos veiksmus:

10 [F] [y^x] $-2{,}42148$ [=]

Dažnai tenka potencijuoti, t. y. rasti skaičių, kai žinomas jo logaritmas.

Pavyzdžiai. 1. Jeigu $\lg x = 0{,}3748$, tai $x \approx 2{,}37028$. Skaičiuotuvu atlikome šitokius veiksmus:

0,3748 [F] [10^x]

2. Jeigu $\lg x = -3{,}425$, tai $x = 0{,}000375837 \approx 0{,}0003758$.

3. Jeigu $\lg x = 3{,}788$, tai $x = 6137{,}62 \approx 6138$.

Atlikime veiksmus su dešimtainiais logaritmais:

$$x = \sqrt{\frac{\pi^3 \cdot \lg 42{,}25}{\lg 3{,}48 + \lg 22{,}5}}.$$

Skaičiuojame skaičiuotuvu „Elektronika БЗ-36“:

[π] [F] [y^x] 3 [=] [F] [$x \leftrightarrow \Pi$] 42,25 [F] [lg]

[F] [× (ПX)] 3,48 [F] [lg] [+] 22,5 [F] [lg] [=]

[F] [÷ (П÷)] [F] [= (ИП)] [F] [$\sqrt{x}$]

Gauname $x = 5{,}16$.

Išspręskime lygtį $5^x = 6$. Abi lygties puses išlogaritmavę pagrindu 10 gauname:

$$x \lg 5 = \lg 6, \qquad x = \frac{\lg 6}{\lg 5} \approx 1{,}11.$$

5.8. Natūriniai logaritmai. Logaritmo pagrindo keitimo formulė

Logaritmas, kurio pagrindas yra skaičius e, vadinamas *natūriniu*. Skaičius

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}72.$$

Bet kurio skaičiaus A natūrinis logaritmas ($\ln A$) skaičiuotuvu randamas šitaip:

A [F] [ln]

Pavyzdžiai. Raskime natūrinius logaritmus:

1. $\ln 38{,}5 = 3{,}65066 \approx 3{,}65$;

2. $\ln 0{,}0575 = -2{,}85597 \approx -2{,}86$;

3. $\ln e = 1$, nes $e^1 = e$.

Skaičius, kai žinomas jo natūrinis logaritmas B, randamas skaičiuotuvu šitaip:

B [F] [e^x]

Pavyzdžiai. Raskime skaičius x, kai žinomi jų natūriniai logaritmai:

1. Jeigu $\ln x = 2{,}72$, tai $x = 15{,}1803 \approx 15{,}2$;

2. Jeigu $\ln x = 0{,}0375$, tai $x = 1{,}03821 \approx 1{,}04$;

3. Jeigu $\ln x = -2{,}25$, tai $x = 0{,}105399 \approx 0{,}105$.

Apskaičiuokime reiškinį

$$x = \sqrt[3]{\frac{e \cdot \ln^2 50{,}5}{\ln 28{,}5 - \ln 18{,}5}}.$$

Skaičiuotuvu veiksmus atliekame tokia tvarka:

50,5 [F] [ln] [F] [y^x] 2 [=] [×] 2,72 [=] [F]

$x \leftarrow \rightarrow \Pi$ [$\longleftrightarrow$] 28,5 [F] [ln] [−] 18,5 [F] [ln] [=] [F]

$\Pi \div$ [÷] [F] ИП [=] [F] [y^x] 3 [F] $1/x$ [/−/] [=]

Gavome $x = 4{,}59$.

Dažnai reikia rasti skaičiaus logaritmą kuriuo nors pagrindu, kai žinomas to skaičiaus logaritmas kitu pagrindu. Sakykime, $\ln x$ reikia pakeisti dešimtainiu logaritmu. Pritaikę logaritmo apibrėžimą natūriniam logaritmui, turime

$$e^{\ln x} = x, \qquad x > 0.$$

Šią lygybę išlogaritmavę pagrindu 10, gauname

$$\ln x \cdot \lg e = \lg x,$$

arba

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx 2{,}302 \lg x.$$

Formulėje

$$\ln x = \frac{1}{\lg e} \lg x$$

daugiklis $\frac{1}{\lg e} \approx 2{,}302$ vadinamas natūrinių logaritmų keitimo dešimtainiais *moduliu*. Panašia formule naudojamės dešimtainius logaritmus keisdami natūriniais:

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0{,}434 \ln x.$$

Apskritai, norint iš skaičiaus x logaritmo pagrindu a ($\log_a x$) gauti to paties skaičiaus x logaritmą pagrindu b ($\log_b x$), reikia naudotis logaritmo pagrindo keitimo formule

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x.$$

Įrodysime šią formulę.

Naudosimės jau žinoma tapatybe

$$a^{\log_a x} = x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Išlogaritmavę ją pagrindu b, gauname:

$$\log_a x \log_b a = \log_b x,$$

arba

$$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x.}$$

Gavome formulę, kurią reikėjo įrodyti. Šioje formulėje daugiklis $\frac{1}{\log_b a}$ vadinamas keitimo moduliu.

Pavyzdžiai. Pakeiskime logaritmų pagrindus.

1. $\log_4 x = \frac{1}{\log_2 4} \log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 x;$

2. $\log_{16} x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 16} \log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} x;$

3. $\log_2 x = \frac{1}{\lg 2} \lg x \approx 3{,}32 \lg x;$

4. $\log_5 x = \frac{1}{\ln 5} \ln x \approx 0{,}621 \ln x.$

Pasinaudoję logaritmų pagrindo keitimo formule, galime pastebėti, kad

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ arba } \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

5.9. Rodiklinių lygčių ir nelygybių sprendimas

Lygtys, kuriose yra rodiklinės, logaritminės, trigonometrinės arba atvirkštinės trigonometrinės funkcijos, vadinamos *transcendentinėmis*. Elementarioji matematika nagrinėja tik kai kurių, tarp jų ir rodiklinių, lygčių sprendimą.

Apibrėžimas. *Lygtys, kurių kintamieji yra tik laipsnio rodikliuose, vadinamos rodiklinėmis.*

Pavyzdžiui, lygtys

$$4^{x+1} = 16, \quad 2^{x+2} = 1, \quad 5^{x+1} + 5^x = 30, \quad 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3 = 0$$

yra rodiklinės, lygtis $2^x = 4x$ nėra rodiklinė.

Nagrinėsime paprasčiausias rodiklines lygtis.

5.9.1. Lygties $a^{f(x)}=1$ sprendimas. Ši lygtis sprendžiama remiantis laipsnio su nuliniu rodikliu savybe: $a^0=1$.

Pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$7^{(x-1)(x+2)}=1.$$

Kadangi $7^0=1$, tai

$$7^{(x-1)(x+2)}=7^0.$$

Matome, kad abiejose lygties pusėse laipsnių pagrindai yra lygūs, todėl turi būti lygūs ir laipsnio rodikliai, t. y.

$$(x-1)(x+2)=0.$$

Iš čia

$$x-1=0, \qquad x+2=0,$$

$$x_1=1; \qquad x_2=-2.$$

Įrašę šias kintamojo reikšmes į sąlygą, gauname tapatybę $7^0=1$. Tai reiškia, kad abi kintamojo reikšmės tenkina sprendžiamąją lygtį.

5.9.2. Lygties $a^x=a^\alpha$ ($\alpha \in R$) sprendimas. Lygties kairioji ir dešinioji pusė yra laipsniai tuo pačiu pagrindu $a \neq 1$. Šiuo atveju minėtosios lygties sprendinys yra

$$x=\alpha.$$

Iš tikrųjų lygties $a^x=a^\alpha$ abi puses padaliję iš a^α, gauname:

$$a^{x-\alpha}=1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha}=a^0 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha.$$

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime lygtį

$$5\sqrt[x]{0{,}2}=125^{x-1}.$$

Abi lygties puses pakeičiame laipsniais pagrindu 5:

$$5\cdot\sqrt[x]{\frac{1}{5}}=(5^3)^{x-1},$$

$$5\cdot 5^{-1/x}=5^{3x-3},$$

$$5^{1-1/x}=5^{3x-3}.$$

Abiejose lygties pusėse pagrindai yra lygūs, todėl lygūs ir laipsnio rodikliai:

$$1-\frac{1}{x}=3x-3 \qquad (\text{čia } x \neq 0),$$

$$x-1=3x^2-3x,$$

$$3x^2-4x+1=0,$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3},$$

$$x_1=\frac{1}{3}, \qquad x_2=1.$$

Patikrinimas. Gautąsias kintamojo reikšmes įrašome į lygtį $5\sqrt[x]{0,2}=125^{x-1}$ ir skaičiuojame abiejų jos pusių skaitines reikšmes:

a) $x_1=\frac{1}{3}$:

$$5\sqrt[1/3]{5^{-1}}=5^{3(-2/3)},$$

$$5\cdot5^{-3}=5^{-2},$$

$$5^{-2}=5^{-2}.$$

b) $x_2=1$:

$$5\sqrt[1]{0,2}=125^0,$$

$$5\cdot5^{-1}=1,$$

$$5^0=1.$$

Ats. $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$.

2. Rasime lygties

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

šaknis.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3(x-3)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-3)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3(x-3)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2},$$

$$2x-3(x-3)=\frac{x}{2},$$

$$2x-3x+9=\frac{x}{2},$$

$$\frac{3}{2}x=9,$$

$$x=6.$$

Patikrinę gauname tapatybę $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Ats. $x=6$.

5.9.3 Lygties $a^x=b$, $a>0$, $a\neq1$ ir $b>0$, sprendimas. Jeigu $b<0$, tai lygtis sprendinių neturi, nes $a^x>0$.

Spręsdami lygtį $a^x=b$, abi jos puses logaritmuojame:

$$x\log_m a=\log_m b;$$

$$x=\frac{\log_m b}{\log_m a}.$$

Lygties $a^x=b$ šaknį galime rasti ir remdamiesi logaritmo apibrėžimu:

$$x=\log_a b.$$

Pavyzdžiui, jeigu $2^x=8$, tai $x=\log_2 8=3$.

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime lygtį

$$3^{2x-1}=5^{3-x}.$$

Išlogaritmavę abi lygties puses gauname

$$(2x-1)\lg 3=(3-x)\lg 5,$$

arba

$$2x\lg 3-\lg 3=3\lg 5-x\lg 5.$$

Narius su kintamaisiais sukeliame į vieną pusę, kitus — į kitą:

$$2x\lg 3+x\lg 5=3\lg 5+\lg 3,$$

arba

$$x(2\lg 3+\lg 5)=3\lg 5+\lg 3.$$

Iš čia

$$x=\frac{3\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+\lg 5}\approx 2{,}23.$$

Ats. $x\approx 2{,}23$.

2. Rasime lygties

$$5^x=12$$

šaknis.

Abi lygties puses logaritmuojame:

$$x\lg 5=\lg 12,$$

$$x=\frac{\lg 12}{\lg 5}\approx 1{,}54.$$

Ats. $x\approx 1{,}54$.

Kai kurias šio tipo lygtis galima spręsti nelogaritmuojant, o remiantis laipsnių savybėmis:

$$a^x b^x=(ab)^x \quad \text{ir} \quad \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Pavyzdžiai. Išspręsime rodiklines lygtis.

1. $2^{x-2}=5^{x-2}$.

Padaliję abi lygties puses iš 5^{x-2} (čia $5^{x-2}\neq 0$), gauname:

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}}=1,$$

iš čia

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2}=1$$

arba

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2}=\left(\frac{2}{5}\right)^0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Ats. $x=2$.

2. $5^{x-3}=7^{3-x}$.

Padaliję abi lygties puses iš 7^{3-x} turime:

$$\frac{5^{x-3}}{7^{3-x}}=1.$$

Pakeitę $7^{3-x}=\frac{1}{7^{x-3}}$ gauname:

$$5^{x-3}\cdot 7^{x-3}=1 \Leftrightarrow (5\cdot 7)^{x-3}=(5\cdot 7)^0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Ats. $x=3$.

3. $6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}$.

$$(2\cdot 3)^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8},$$
$$2^{2x+4}\cdot 3^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$$

Paskutinę lygybę užrašome šitaip:

$$\frac{2^{2x+4}}{2^{x+8}}=\frac{3^{3x}}{3^{2x+4}}.$$

Pritaikę laipsnių su vienodais pagrindais dalybos taisyklę gauname

$$2^{x-4}=3^{x-4}.$$

Padaliję abi lygties puses iš 3^{x-4} randame:

$$\frac{2^{x-4}}{3^{x-4}}=1$$

arba

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^0, \quad x-4=0, \quad x=4.$$

Ats. $x=4$.

5.9.4. Lygčių sprendimas iškeliant bendrąjį daugiklį. Spręsime konkrečias rodiklines lygtis.

1. $5^{x+1}+5^x=30,$
$5^x\cdot 5+5^x=30,$
$5^x(5+1)=30,$
$5^x\cdot 6=30,$
$5^x=5,$
$x=1.$

Patikrinę įsitikiname, kad $x=1$ tenkina lygtį.

2. $3^{2\sqrt{x}}+3^{2\sqrt{x}-1}-3^{2\sqrt{x}-2}=11,$

$3^{2\sqrt{x}}+3^{2\sqrt{x}}\cdot 3^{-1}-3^{2\sqrt{x}}\cdot 3^{-2}=11,$

$3^{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)=11,$

$3^{2\sqrt{x}}\cdot\frac{11}{9}=11,$

$3^{2\sqrt{x}}=9 \Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x}}=3^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1.$

Ats. $x=1$.

3. $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=5^x+5^{x+1}+5^{x+2}$,

$3^x+3^x\cdot3+3^x\cdot9=5^x+5^x\cdot5+5^x\cdot25$,

$3^x(1+3+9)=5^x(1+5+25)$,

$3^x\cdot13=5^x\cdot31$.

Abi lygties puses logaritmuojame:

$$x\lg3+\lg13=x\lg5+\lg31.$$

Išskiriame narius su kintamaisiais ir bendrąjį daugiklį iškeliame prieš skliaustus:

$$x(\lg5-\lg3)=\lg13-\lg31,$$

$$x(\lg5-\lg3)=-(\lg31-\lg13),$$

$$x\lg\frac{5}{3}=-\lg\frac{31}{13},$$

$$x=-\frac{\lg\frac{31}{13}}{\lg\frac{5}{3}}\approx-1{,}7.$$

Ats. $x\approx-1{,}7$.

5.9.5. Lygčių sprendimas įvedant naujus kintamuosius.

1. $4^x+2^{x+1}=80$.

Parašę $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$, turime

$$2^{2x}+2\cdot2^x-80=0.$$

Pažymėsime $2^x=y$, tuomet

$$y^2+2y-80=0,$$

$$y=-1\pm\sqrt{1+80}=-1\pm9,$$

$$y_1=8, \qquad y_2=-10.$$

Rastąsias y reikšmes įrašę į keitinį $2^x=y$, gauname,

a) $2^x=8$,
$2^x=2^3$,
$x=3$;

b) $2^x=-10$,
$x\in\varnothing$.

Ats. $x=3$.

2. $3^{x+1}+18\cdot3^{-x}=29$.

$$3\cdot3^x+\frac{18}{3^x}-29=0.$$

Padauginę abi lygties puses iš 3^x, gauname

$$3\cdot3^{2x}-29\cdot3^x+18=0.$$

Keitinys $3^x=y$.

$$3y^2-29y+18=0,$$

$$y=\frac{29\pm\sqrt{841-216}}{6}=\frac{29\pm 25}{6},$$

$$y_1=9,\quad y_2=\frac{2}{3}.$$

Rastąsias y reikšmes įrašome į išraišką $3^x=y$:

a) $3^x=9$, b) $3^x=\frac{2}{3}$,

$3^x=3^2$, $x\lg 3=\lg\frac{2}{3}$,

$x_1=2$; $x_2=\frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg 3}\approx-0{,}369$.

Ats. $x_1=2$, $x_2\approx-0{,}369$.

3. $2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}=0$.
$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+3\cdot 3^{2x}=0$.

Abi lygties puses dalijame iš 3^{2x}:

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^x+3=0;$$

čia $2^x\cdot 3^x:3^{2x}=2^x\cdot 3^{-x}=\frac{2^x}{3^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Jeigu $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$, tai $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=y^2$. Taigi

$$2y^2-5y+3=0,$$

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm 1}{4},$$

$$y_1=1,\quad y_2=\frac{3}{2}.$$

Rastąsias y reikšmes įrašome į išraišką $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$, b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3}{2}$,

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$,

$x_1=0$; $x_2=-1$.

Ats. $x_1=0$, $x_2=-1$.

4. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Reiškinį $(2+\sqrt{3})^x$ padauginę ir padaliję iš $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$ gauname:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}=\frac{\left(\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\right)^x}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}=$$

$$=\frac{1^x}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}=\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}.$$

Šį reiškinį įrašę vietoje $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ į pradinę lygtį, gauname:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}=4.$$

Abi lygties puses dauginame iš $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2x}-4\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+1=0.$$

Pažymime $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=y$, tuomet

$$y^2-4y+1=0,$$

$$y=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3},$$

$$y_1=2-\sqrt{3},\qquad y_2=2+\sqrt{3}.$$

Įrašome šias y reikšmes į keitinį $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=y$:

a) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3},$

$(2-\sqrt{3})^{x/2}=2-\sqrt{3},$

$\frac{x}{2}=1,$

$x_1=2;$

b) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3},$

$\frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}=2+\sqrt{3},$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}=2+\sqrt{3},$

$(2+\sqrt{3})^{-\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3},$

$-\frac{x}{2}=1,$

$x_2=-2.$

Galime įsitikinti, kad abi kintamojo x reikšmės tenkina sprendžiamąją lygtį.

Ats. $x_1=-2$, $x_2=2$.

5.9.6. Rodiklinių nelygybių sprendimas. Nagrinėsime rodiklinę nelygybę $a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}$, $a>0$, $a\neq1$. Žinome (žr. 5.3), kad rodiklinė funkcija $y=a^x$ yra didėjanti, kai $a>1$, ir mažėjanti, kai $0<a<1$. Šių funkcijų grafikai pavaizduoti 145 paveiksle. Kai $a>1$, didėjant argumentui didėja ir funkcija. Taigi

$$a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}\Leftrightarrow f(x)>\varphi(x).$$

Pavyzdžiui, jeigu $2^{2x-1}>2^3$, tai

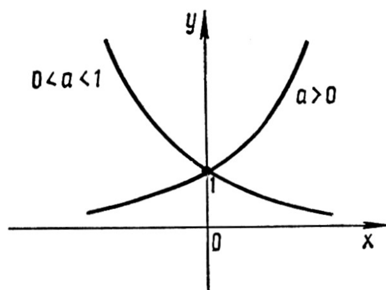
$$2x-1>3 \Leftrightarrow 2x>4 \Leftrightarrow x>2.$$

Tuo atveju, kai $0<a<1$, funkcija a^x yra mažėjanti. Taigi

$$a^{f(x)}>a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x)<\varphi(x).$$

Pavyzdžiui, kai $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-3}<\left(\frac{1}{2}\right)^7$,

$$5x-3>7 \Leftrightarrow 5x>10 \Leftrightarrow x>2.$$



145 pav.

Pavyzdžiai. Išspręsime rodiklines nelygybes.

1. $\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-1}>2^{3x-7}$.

Abiejose nelygybės pusėse suvienodiname pagrindus:

$$(2^{-4})^{2x-1}>2^{3x-7} \Leftrightarrow 2^{-4(2x-1)}>2^{3x-7},$$

$$-4(2x-1)>3x-7 \Leftrightarrow -8x+4>3x-7,$$

$$11x<11 \Leftrightarrow x<1.$$

Ats. $x\in(-\infty, 1)$.

2. $\sqrt[3]{(0{,}25)^{2x-1}}\geqslant\left(\frac{1}{64}\right)^{2x+1}$.

Suvienodiname pagrindus:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2x-1}{3}}\geqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{3(2x+1)},$$

$$\frac{2x-1}{3}\leqslant 3(2x+1) \Leftrightarrow 2x-1\leqslant 18x+9,$$

$$16x\geqslant-10 \Leftrightarrow x\geqslant-\frac{5}{8}.$$

Ats. $x\ni\left[-\frac{5}{8}, +\infty\right)$.

3. $2^x+2^{-x+1}-3<0$,

$2^x+2\cdot 2^{-x}-3<0$,

$2^x+\frac{2}{2^x}-3<0$.

Abi lygties puses dauginame iš 2^x $(2^x>0)$:

$$2^{2x}-3\cdot 2^x+2<0.$$

Pažymime $2^x=y$, tuomet $y^2-3y+2<0$. Išsprendę kvadratinę nelygybę, gauname $1<y<2$. Kadangi $2^x=y$, tai

a) $2^x>1 \Leftrightarrow x>0$; b) $2^x<2 \Leftrightarrow x<1$.

Ats. $x\in(0, 1)$.

5.10. Logaritminių lygčių ir nelygybių sprendimas

Lygtys, kurių kintamieji yra po logaritmo ženklu, vadinamos *logaritminėmis.*

Logaritminės yra, pavyzdžiui, šios lygtys:

$$\log_2 x=\log_2(x+1), \qquad \log_2 x=2-2\lg 2,$$

$$\log_x 2+\log_2 x=2{,}5, \qquad \lg^2 x-4\lg x+3=0.$$

Lygtys $\log_a x=x$, $\log_x a=x$ nėra logaritminės. Jas galima spręsti grafiniu būdu.

Nagrinėsime kai kurių tipų logaritmines lygtis.

5.10.1. Lygtys, sprendžiamos remiantis logaritmo apibrėžimu. Priminsime (žr. 5.4) pagrindines logaritmų tapatybes:

$$\log_a x=\alpha \Rightarrow a^\alpha=x,$$

$$a^{\log_a x}=x.$$

Kai kurios logaritminės lygtys sprendžiamos naudojantis šiomis tapatybėmis.

Pavyzdžiai. Išspręsime logaritmines lygtis.

1. $\lg(x^2-5x+7)=0$. Pagal logaritmo apibrėžimą

$$10^0=x^2-5x+7,$$

$$x^2-5x+6=0,$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2},$$

$$x_1=2, \qquad x_2=3.$$

Gautąsias kintamojo reikšmes įrašę į sąlygą gauname:

a) $\lg(4-10+7)=0$, b) $\lg(9-15+7)=0$,

$\lg 1=0$; $\lg 1=0$.

Ats. $x_1=2$, $x_2=3$.

2. $\log_{x-1}(10-5x-x^2)=2.$

Randame lygties apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} 10-5x+x^2>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R, \\ x>1, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Taikome logaritmo apibrėžimą ir sprendžiame:

$$(x-1)^2=10-5x+x^2,$$
$$x^2-2x+1=10-5x+x^2,$$
$$3x=9,$$
$$x=3.$$

Rastoji x reikšmė priklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Ats. $x=3.$

3. $\log_{x-1}(x+2-3x^2)=2.$

Randame lygties apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} x+2-3x^2>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\frac{2}{3},\ 1\right), \\ x>1, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Ats. Sprendinių nėra $(x\in\varnothing)$.

4. $\log_2(-x)=-5.$

Lygties apibrėžimo sritis: $-x>0 \Leftrightarrow x<0.$

Pagal logaritmo apibrėžimą

$$-x=2^{-5},$$
$$x=-2^{-5}=-\frac{1}{2^5}=-\frac{1}{32}.$$

Skaičius $-\frac{1}{32}$ priklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Ats. $x=-\frac{1}{32}.$

5. $x^{\log_x(x^2-3)}=1.$

Šios lygties apibrėžimo sritis yra

$$\begin{cases} x^2-3>0, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>3, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow |x|>\sqrt{3}.$$

Pritaikę tapatybę

$$a^{\log_a x}=x,$$

sprendžiame:

$$x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=4;$$
$$x_1=-2, \qquad x_2=2.$$

Skaičius -2 nepriklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Ats. $x=2$.

6. $\log_2(9-2^x)+x=3$.

Kintamąjį x, esantį kairėje lygties pusėje, perkeliame į dešinę ir taikome logaritmo apibrėžimą:

$$\log_2(9-2^x)=3-x,$$
$$2^{3-x}=9-2^x,$$
$$2^3\cdot 2^{-x}=9-2^x,$$
$$\frac{8}{2^x}=9-2^x.$$

Pastarosios lygties abi puses dauginame iš 2^x:

$$8=9\cdot 2^x-2^{2x},$$

arba

$$2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0.$$

Pažymime $2^x=y$ ir lygtį užrašome šitaip:

$$y^2-9y+8=0.$$

Iš čia

$$y_1=1, \qquad y_2=8.$$

Rastąsias y reikšmes įrašę į išraišką $2^x=y$, gauname:

a) $2^x=1 \Rightarrow x_1=0$; b) $2^x=8 \Rightarrow x_2=3$.

Patikrinimas. a) $x_1=0$, $\log_2(9-1)=3$, $\log_2 8=3$;

b) $x_2=3$, $\log_2(9-8)+3=3$, $\log_2 1=0$.

Ats. $x_1=0$, $x_2=3$.

5.10.2. Lygties $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ sprendimas. Tokia lygtis dažniausiai sprendžiama potencijuojant abi jos puses ir remiantis šia teorema:

lygtis

$$\log_a f(x)=\log_a \varphi(x) \qquad (1)$$

ekvivalenti vienai iš šių sistemų:

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x), \\ f(x)>0 \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} f(x)=\varphi(x), \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$$

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime lygtį

$$\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x).$$

Remdamiesi suformuluotąja teorema sprendžiame:

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x, \\ 7-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12=0, \\ 2x>7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=4,\ x_2=-3, \\ x<3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3.$$

Ats. $x=-3$.

2. Rasime lygties

$$\lg(x+6)-\frac{1}{2}(2x-3)=2-\lg 25$$

šaknis.

Remiamės logaritmų savybėmis:

$$\lg(x+6)-\lg\sqrt{2x-3}=\lg 100-\lg 25.$$

Abi lygties puses potencijuojame:

$$\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=\lg\frac{100}{25}.$$

Iš čia

$$\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=4,$$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}-4=0,$$

$$\frac{x+6-4\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}}=0.$$

Kadangi trupmena lygi nuliui, tai jos skaitiklis turi būti lygus nuliui, o vardiklis nelygus nuliui:

$$\begin{cases} 4\sqrt{2x-3}=x+6, \\ 2x-3\neq 0. \end{cases}$$

Sprendžiame lygtį $4\sqrt{2x-3}=x+6$:

$$16(2x-3)=x^2+12x+36,$$
$$x^2-20x+84=0,$$
$$x=10\pm\sqrt{100-84}=10\pm 4;$$
$$x_1=6,\ x_2=14.$$

Išsprendę nelygybę $2x-3\neq 0$, gauname

$$x\neq\frac{3}{2}.$$

Įrašę rastąsias kintamojo x reikšmes į pradinę lygtį, gausime tapatybes.

Ats. $x_1=6$, $x_2=14$.

Kitaip samprotaudami įsitikintume, kad skaičiai $x_1=6$, $x_2=14$ priklauso pradinės lygties apibrėžimo sričiai

$$\begin{cases} x+6>0, \\ 2x-3>0. \end{cases}$$

5.10.3. Antrojo laipsnio lygtis logaritmo atžvilgiu. Pateiksime dažniausiai pasitaikančių reiškinių pertvarkius:

1) $\lg^2 x^3=(\lg x^3)^2=(3\lg x)^2=9\lg^2 x;$

2) $\lg^3 x^4 = (4 \lg x)^3 = 64 \lg^3 x$;

3) $\lg^3 \sqrt{x} = (\lg\sqrt{x})^3 = \frac{1}{8} \lg^3 x$;

4) $\lg^4 \sqrt[3]{x} = \left(\frac{1}{3} \lg x\right)^4 = \frac{1}{81} \lg^4 x$.

Pavyzdžiai. 1. $\log_3^2 x - 3 \lg_3 x + 2 = 0$.

Pažymime $\log_3 x = y$ ir gauname kvadratinę lygtį $y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Šias reikšmes įrašę į keitinį $\log_3 x = y$, randame:

a) $\log_3 x = 1$, $x_1 = 3$;

b) $\log_3 x = 2$, $x_2 = 3^2 = 9$.

Nesunku įsitikinti, kad abi reikšmės tenkina pradinę lygtį.

Ats. $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.

2. $\frac{1}{5 - 4 \lg x} + \frac{4}{1 + \lg x} = 3$.

Pažymime naują kintamąjį $y = \lg x$ ir sprendžiame:

$$\frac{1}{5-4y} + \frac{4}{1+y} = 3,$$

$$\frac{1}{5-4y} + \frac{4}{1+y} - 3 = 0,$$

$$\frac{1+y+20-16y-15-15y+12y+12y^2}{(5-4y)(1+y)} = 0,$$

$$\frac{12y^2-18y+6}{(5-4y)(1+y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12y^2 - 18y + 6 = 0, \\ 5 - 4y \neq 0, \\ 1 + y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 = 0, \\ y \neq \frac{5}{4}, \\ y \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Rastąsias y reikšmes įrašę į keitinį $\lg x = y$, gauname:

a) $\lg x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 10^{1/2} = \sqrt{10}$;

b) $\lg x = 1 \Leftrightarrow x_2 = 10$.

Nesunkiai įsitikintume, kad abi x reikšmės tenkina pradinę lygtį.

Ats. $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = 10$.

5.10.4. Lygtys, kurių kintamieji yra logaritmo pagrinde arba laipsnio rodiklyje. Pavyzdžiui, tokio tipo yra lygtys

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x, \qquad x^{\lg x} = 10\,000,$$

$$x^{1-0{,}25 \lg x} = 10, \qquad x^{\lg x} = 100x.$$

Išspręskime jas.

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Šios lygties apibrėžimo sritis yra $x>0$. Atsižvelgdami į tai, abi lygties puses logaritmuojame:

$$\sqrt{x}\lg x = \frac{1}{2} x \lg x.$$

Sukėlę abu lygties narius į vieną pusę ir iškėlę už skliaustų $\lg x$, gauname:

$$\lg x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0,$$

arba

$$\lg x = 0, \quad x_1 = 1;$$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0, \quad \sqrt{x} = \frac{1}{2}x, \ x = \frac{1}{4}x^2, \quad \frac{1}{4}x^2 - x = 0,$$

$$x\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0, \ x_2 = 0; \quad \frac{1}{4}x - 1 = 0, \ x_3 = 4.$$

Kintamojo x reikšmė $x_2=0$ nepriklauso pradinės lygties apibrėžimo sričiai, todėl ji negali būti šaknis. Reikšmės $x_1=1$ ir $x_3=4$ tenkina pradinę lygtį.

Ats. $x_1=1$, $x_2=4$.

2. $x^{\lg x} = 10\,000$.

Šios lygties apibrėžimo sritis yra $x>0$, $x \neq 1$. Abi lygties puses logaritmuojame ir gauname:

$$\lg x \lg x = 4,$$

arba

$$\lg^2 x = 4 \Leftrightarrow \lg x = \pm 2.$$

Jeigu $\lg x = -2$, tai $x_1 = 10^{-2} = 0{,}01$.
Jeigu $\lg x = 2$, tai $x_2 = 10^2 = 100$.
Patikrinę gautąsias x reikšmes įsitikintume, kad jos priklauso lygties apibrėžimo sričiai.
Ats. $x_1 = 0{,}01$, $x_2 = 100$.

3. $x^{1-0{,}25\lg x} = 10$.

Išlogaritmavę abi lygties puses, gauname:

$$(1 - 0{,}25 \lg x)\lg x = 1,$$

arba

$$\lg x - 0{,}25\lg^2 x - 1 = 0.$$

Pažymime $\lg x = y$ ir gauname $y - 0{,}25y^2 - 1 = 0$. Ją pertvarkome ir sprendžiame lygtį

$$y^2 - 4y + 4 = 0.$$

Gauname $y_1 = y_2 = 2$.

Įrašę šią y reikšmę į išraišką $\lg x=y$, turime:

$$\lg x=2 \Leftrightarrow x=100.$$

Skaičius 100 priklauso lygties apibrėžimo sričiai $x>0$, $x\neq 1$. *Ats.* $x=100$.

4. $x^{\lg x}=100x$.

Lygties apibrėžimo sritis yra $x>0$, $x\neq 1$. Abi lygties puses logaritmuojame ir sprendžiame:

$$\lg x\cdot\lg x=\lg 100+\lg x,$$
$$\lg^2 x-\lg x-2=0.$$

Pažymime $\lg x=y$ ir sprendžiame lygtį

$$y^2-y-2=0,$$

iš kurios gauname

$$y_1=-1,\ y_2=2.$$

Įrašę šias reikšmes į išraišką $\lg x=y$, randame pradinės lygties šaknis:

$$\lg x=-1 \Leftrightarrow x_1=10^{-1}=0{,}1;$$
$$\lg x=2 \Leftrightarrow x_2=10^2=100.$$

Skaičiai 0,1 ir 100 įeina į lygties apibrėžimo sritį.
Ats. $x_1=0{,}1$, $x_2=100$.

5. $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$.
Ši lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1. \end{cases}$$

Išsprendę lygtį

$$x^2-1=5-x,$$

arba

$$x^2+x-6=0,$$

gauname

$$x_1=-3,\ x_2=2.$$

Įrašę tas reikšmes į lygties apibrėžimo sritį

$$\begin{cases} 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1, \end{cases}$$

galime įsitikinti, kad tik $x_2=2$ yra pradinės lygties šaknis.
Ats. $x=2$.

Apskritai, sprendžiant lygtį

$$\log_{a(x)}f(x)=\log_{a(x)}\varphi(x), \qquad (1)$$

reikia prisiminti, kad

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

(1) lygties šaknimis laikysime tokias lygties $f(x) = \varphi(x)$ šaknis, kurios priklauso apibrėžimo sričiai

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

5.10.5. Lygčių su skirtingais logaritmų pagrindais sprendimas. Spręsdami tokias lygtis naudosimės logaritmo pagrindo keitimo formule

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x.$$

Pavyzdžiai. 1. $\log_x 2 + \log_2 x = 2{,}5.$

Lygties narį $\log_x 2$ keičiame logaritmu su pagrindu 2:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x} \cdot \log_2 2.$$

Kadangi $\log_2 2 = 1$, tai

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}.$$

Po šio keitinio lygtis tampa

$$\frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = 2{,}5,$$

arba

$$\log_2^2 x - 2{,}5 \log_2 x + 1 = 0,$$

arba

$$2 \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 2 = 0.$$

Pažymėję $\log_2 x = y$, sprendžiame lygtį

$$2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}, \qquad y_2 = 2.$$

Įrašę šias y reikšmes į lygybę $\log_2 x = y$, gauname:

a) $\log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{1/2} = \sqrt{2};$

b) $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4.$

Lygties $\log_x 2+\log_2 x=2{,}5$ apibrėžimo sritis aprašoma nelygybių sistema

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Matome, kad skaičiai $x_1=\sqrt{2}$ ir $x_2=4$ tenkina šias nelygybes.

Ats. $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=4$.

2. $\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\log_{x-1/2}(x+1)$.

Šios lygties apibrėžimo sritis yra

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ x-\frac{1}{2}\neq 1. \end{cases}$$

Vienodiname logaritmų pagrindus:

$$\log_{x-1/2}(x+1)=\frac{1}{\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)}\cdot\log_{x+1}(x+1)=\frac{1}{\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)}.$$

Pradinę lygtį užrašome šitaip:

$$\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)}.$$

Kadangi $x>\frac{1}{2}$ (iš apibrėžimo srities), tai

$$\log^2_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=1,$$

arba

$$\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\pm 1.$$

a) $\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=-1$.

Pagal logaritmo apibrėžimą

$$(x+1)^{-1}=x-\frac{1}{2},$$

arba

$$\frac{1}{x+1}=x-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{x+1}-x+\frac{1}{2}=0,$$

$$\frac{2-2x^2-2x+x+1}{2(x+1)}=0,$$

$$-2x^2-x+3=0,$$

$$2x^2+x-3=0,$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm5}{4},$$

$$x_1=-\frac{3}{2}, \qquad x_2=1.$$

b) $\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=1.$

Pagal logaritmo apibrėžimą

$$x+1=x-\frac{1}{2},$$

arba

$$1\neq-\frac{1}{2}.$$

Taigi ši lygtis sprendinių neturi.

Patikrinę reikšmes $x_1=-\frac{3}{2}$ ir $x_2=1$, įsitikiname, kad pradinės lygties apibrėžimo sričiai priklauso tik $x_2=1$.

Ats. $x=1$.

5.10.6. Logaritminių nelygybių sprendimas. Nelygybės, kurių kintamieji yra po logaritmo ženklu, vadinamos *logaritminėmis*. Logaritminės yra, pavyzdžiui, šios nelygybės:

$$\log_2(x+1)>1, \qquad \log^2_{1/2}x>25, \qquad \log^2_a x-\log_a x-6>0.$$

Nagrinėsime nelygybę

$$\log_a f(x)>\log_a g(x). \tag{1}$$

Sprendžiant tokias nelygybes, reikia turėti omenyje, kad funkcija $y=\log_a x$ yra didėjanti, kai $a>1$, ir mažėjanti, kai $0<a<1$ (žr. 5.5). Taigi tuo atveju, kai $a>1$, iš (1) išplaukia $f(x)>g(x)$, o kai $0<a<1$, iš (1) išplaukia $f(x)<g(x)$. Be to, reikia žinoti (žr. 5.5), kad logaritminė funkcija yra apibrėžta tik teigiamųjų skaičių aibėje. Taigi galioja nelygybės $f(x)>0$ ir $g(x)>0$, kurios sudaro (1) nelygybės apibrėžimo sritį.

Atsižvelgdami į šiuos samprotavimus, pradinę nelygybę $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ galime pakeisti sistemomis:

1) $a>1$: $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>g(x); \end{cases}$ 2) $0<a<1$: $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$

Pirmąją sistemą galime užrašyti paprasčiau: nelygybė $f(x)>0$ išplaukia iš nelygybių $f(x)>g(x)$ ir $g(x)>0$, todėl jos sistemoje nerašysime:

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x). \end{cases}$$

Panašiai antrąją sistemą užrašome šitaip:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$$

Pavyzdžiai. 1. $\log_2(2x+3)>0,$

$\log_2(2x+3)>\log_2 1.$

Ši nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 2x+3>1, \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+3>1 \Leftrightarrow x>-1.$$

Ats. $x\in(-1, +\infty).$

2. $\log_2(3x+1)<\log_2(x-3).$

Ši nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 3x+1<x-3, \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<-4, \\ 3x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ x>-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Gautoji sistema yra prieštaringa.

Ats. Sprendinių nėra.

3. $\log_{1/2}(4x-1)<\log_{1/2}(2x-3).$

Ši nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 4x-1>2x-3, \\ 2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-2, \\ 2x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x>\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}.$$

Gautosios kintamojo reikšmės priklauso pradinės nelygybės apibrėžimo sričiai

$$\begin{cases} 2x-3>0, \\ 4x-1>0. \end{cases}$$

Ats. $x\in\left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$

4. $\log_{1/3}\frac{x^2+4x}{2x-3}<1,$

$\log_{1/3}\frac{x^2+4x}{2x-3}<\log_{1/3}\frac{1}{3}.$

Gautoji nelygybė ekvivalenti sistemai

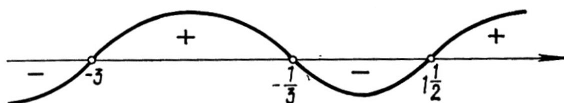
$$\begin{cases} \frac{x^2+4x}{2x-3}>0, \\ \frac{x^2+4x}{2x-3}>\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{2x-3}>\frac{1}{3},$$

$$\frac{x^2+4x}{2x-3}-\frac{1}{3}>0,$$

$$\frac{3x^2+10x+3}{(2x-3)3}>0,$$

$$\frac{3(x+3)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(2x-3)}>0.$$

Pritaikę intervalų metodą, gauname (146 pav.):



146 pav.

Ats. $x \in \left(-3, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

5. $\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$.

Jeigu $x-2>1$, tai pradinei nelygybei taikome pirmąją sistemą; jeigu $0<x-2<1$, taikome antrąją sistemą. Taigi pradinė nelygybė ekvivalenti dviejų sistemų

$$\begin{cases} x-2>1, \\ 24-6x>0, \\ 2x-3>24-6x, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<x-2<1, \\ 2x-3>0, \\ 2x-3<24-6x \end{cases}$$

visumai, t. y.

$$\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2>1, \\ 24-6x>0, \\ 2x-3>24-6x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-2<1, \\ 2x-3>0, \\ 2x-3<24-6x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>3, \\ x<4, \\ x>3\frac{3}{8}, \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x<3, \\ x>\frac{3}{2}, \\ x<3\frac{3}{8} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<4, \\ x>3\frac{3}{8}, \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ x>2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ats. $x \in (2, 3) \cup \left(3\frac{3}{8}, 4\right)$.

5.10.7. Rodiklinių ir logaritminių lygčių sistemų sprendimas. Išspręskime sistemą

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$$

Pertvarkome pirmąją lygtį:

$$3^y \cdot 3^{2x} = 3^4 \Leftrightarrow 3^{y+2x} = 3^4 \Leftrightarrow 2x + y = 4. \quad (1)$$

Pertvarkome antrąją sistemos lygtį:

$$\lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3 \Leftrightarrow \lg\frac{(x+y)^2}{x} = \lg 9 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{x} = 9. \quad (2)$$

Sudarome (1) ir (2) lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x+y=4, \\ \dfrac{(x+y)^2}{x} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=4, \\ x^2+2xy+y^2-9x=0. \end{cases}$$

Gautąją sistemą sprendžiame keitimo būdu:

$$y = 4-2x;$$
$$x^2+2x(4-2x)+(4-2x)^2-9x=0,$$
$$x^2+8x-4x^2+16-16x+4x^2-9x=0,$$
$$x^2-17x+16=0,$$
$$x = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - 16} = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{17}{2} \pm \frac{15}{2};$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 16.$$

Gautąsias x reikšmes įrašę į išraišką $y=4-2x$, gauname:

$$y_1 = 4-2\cdot 1 = 4-2 = 2;$$
$$y_2 = 4-2\cdot 16 = 4-32 = -28.$$

Patikrinę įsitikiname, kad abi kintamųjų poros tenkina pradinę sistemą. Taigi sistemos sprendiniai yra (1, 2), (16, −28).

5.11. Pratimai

1. 1) Vienoje koordinačių sistemoje nubraižykite grafikus šių funkcijų:

a) $y=x^2$, b) $y=x^{-2}$, c) $y=-x^2$, d) $y=-x^{-2}$.

2) Vienoje koordinačių sistemoje nubraižykite grafikus funkcijų:

a) $y=\pm x^{2/3}$, b) $y=\pm x^{3/2}$.

3) Nubraižykite funkcijų grafikus:

a) $y=\pm x^{1/3}$, b) $y=\pm x^{-1/3}$.

4) Iš funkcijos $y=\dfrac{1}{x}$ grafiko, jį transformuodami, gaukite funkcijos $y=\dfrac{1}{x-2}$ grafiką.

5) Iš funkcijos $y=\frac{1}{x^2}$ grafiko, jį transformuodami, nubraižykite funkcijos $y=\frac{1}{x^2}+2$ grafiką.

6) Iš funkcijos $y=\sqrt[3]{x}$ grafiko, jį transformuodami, gaukite funkcijos $y=\sqrt[3]{x}-2$ grafiką.

7) Viename paveiksle nubraižykite funkcijų $y=2^x$ ir $y=10^x$ grafikus. Nurodykite, kuo tų funkcijų grafikai yra panašūs ir kuo skiriasi.

8) Nubraižykite funkcijų $y=2^x$, $y=-2^x$, $y=2^{x+1}$ grafikus ir nurodykite tų funkcijų apibrėžimo bei kitimo sritis.

9) Nubraižykite šių funkcijų grafikus ir paaiškinkite jų savybes:

a) $y=2^{2x}$; b) $y=2^{-x}$; c) $y=-2^x$;

d) $x=3^{|x|}$; e) $y=3^{|x-2|}$; f) $y=2^x-1$.

10) Nubraižykite funkcijų $y=2^{-x}$, $y=2^{3x}$, $y={}^{2x}$, $y=-2^x$ grafikus vienoje koordinačių sistemoje.

2. Išspręskite lygtis ir nelygybes:

1) $2^x=4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$, $3^x=-9$;

2) $2^x=\frac{1}{2}$, $3^x=\frac{1}{9}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x=-27$;

3) $2^x>4$, $3^x<\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x\geqslant 4$.

3. Išspręskite rodiklines lygtis:

1) $2^{x-1}=4^5$; 2) $4^{-1/x}=\frac{1}{2}$;

3) $9^{-3x}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$; 4) $\sqrt[x]{16}=\sqrt{4^x}$;

5) $\sqrt{a^{x+1}}=\sqrt[3]{a^{2x-1}}$; 6) $\left(\frac{1}{64}\right)^x=\sqrt{\frac{1}{8}}$;

7) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x=128$; 8) $5^{x^2-x-6}=1$;

9) $2^{x^2-6x+0{,}5}=\frac{1}{16\sqrt{2}}$; 10) $16^{2x-1}=\frac{1}{0{,}25^{3x+22}}$;

11) $100^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[x]{10000}$; 12) $\sqrt{9^{x-3{,}25}}=\sqrt[4]{3}$;

13) $4^{\sqrt{x+1}}-64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}=0$; 14) $(0{,}25)^{x-14}=\frac{128}{2^{x-16}}$;

15) $2^{x-1}\cdot 5^{x-1}=0{,}001\cdot 10^{2x+5}$; 16) $0{,}01\sqrt[x]{1000}=\sqrt[3]{(0{,}1)^x}$;

17) $\sqrt{3^x}\cdot\sqrt{5^x}=225$; 18) $\sqrt[x]{\sqrt{2^{3x+1}}}-\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}=0$;

19) $\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x+1}}}=1{,}5$; 20) $\frac{2^{5\sqrt[3]{x}}}{2^{\sqrt[3]{x^2}+2{,}6}}=8\sqrt[5]{4}$;

21) $(0{,}1(6))^{x-16}\cdot 0{,}25=54$; 22) $\sqrt[x^2-1]{32}\cdot\sqrt[x-1]{4}-\sqrt[x+1]{8}=0$;

23) $5^x\cdot\sqrt[x+1]{8^x}=100$.

4. Išspręskite rodiklines lygtis:

1) $11^{x-7}=17^{x-7}$; 2) $8^{x-3}=9^{x-3}$;

3) $15^{2x+4}=3^{3x}\cdot 5^{4x-4}$; 4) $10^{3x+2}=5^{4x+1}\cdot 2^{2x+3}$;

5) $\frac{1}{8}\cdot 6^{3x}=2^{2x}\cdot 3^{3x}$; 6) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot 10^{5x-5}$;

7) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36$; 8) $6^{2x+4}=2^{x+8}\cdot 3^{3x}$;

9) $2^{3x}\cdot 7^{x-2}=4^{x+1}$; 10) $3^{2(2x+5)}\cdot 5^{2(3x+1)}=15^{5x+6}$.

5. Išspręskite rodiklines lygtis:

1) $3^{x+2}-3^x=72$; 2) $2^{x+3}-2^x=112$;

3) $2^x-2^{x-4}=15$; 4) $3^{2x+2}+3^{2x}=30$;

5) $2^{x+3}-2^x+2^{x-2}=29$; 6) $5^{x+1}-5^{x-1}=24$;

7) $5^x+3\cdot 5^{x-2}=140$; 8) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$;

9) $5\cdot 2^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x-1}}=56$; 10) $4^x-3^{x0;5}=3^{x+0;5}-2^{2x-1}$;

11) $9^x-2^{x+0;5}=2^{x+3;5}-3^{2x-1}$;

12) $\left(\frac{1}{121}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{169}\right)^{1-x}+11^{2x-3}+13^{2x-3}=0$.

6. Išspręskite rodiklines lygtis:

1) $3^{2x}-5\cdot 3^x+6=0$; 2) $4^x+2^{x+1}=80$;

3) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$; 4) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$;

5) $2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{0{,}5\sqrt{x}}=24$; 6) $3\cdot 4^{x/4}-7\cdot 2^{x/4}=20$;

7) $5^x+\frac{125}{5^x}=30$; 8) $2^x-3\cdot 2^{(x-3)/2}=26$;

9) $3^{4x}-10\cdot 3^{2x}+9=0$; 10) $2^{4x}-5\cdot 2^{2x}+4=0$;

11) $2\cdot 2^{4}{}_{x}-5\cdot 2^{2}{}_{x}+2=0$; 12) $4^{\sqrt{x^2-2}+x}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.

7. Išspręskite rodiklines nelygybes:

1) $\left(\frac{1}{25}\right)^{3x-2}>5^{2-x}$; 2) $\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-1}>2^{3x-7}$;

3) $(0{,}02)^{7(x^2-1)+6x-7x^2}<1$; 4) $32^{2x-1}\cdot\sqrt{2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;

5) $(3\sqrt{3})^{x+1}<\left(\frac{1}{27}\right)^{4x+2}$; 6) $\left(\frac{1}{0{,}01}\right)^{x+1}<\sqrt{10^{2x+6}}$;

7) $\sqrt[3]{(0{,}25)^{2x-1}}>\left(\frac{1}{64}\right)^{2x+1}$; 8) $0{,}2\sqrt[3]{5^{x-1}}>\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{2x-1}{8}}$;

9) $2^{x+2}-2^x>96$; 10) $7^x-7^{x-1}<6$;

11) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}>28$; 12) $2^{4/x}>0$;

13) $3^{x^2-x-6}<1$; 14) $5^{x^2-7x+12}>1$;

15) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13} < \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x}$;

16) $3^{1/x}+3^{1/x+3}>84$;

17) $2^{2x}+2\cdot 2^x-80>0$.

8. Išspręskite logaritmines lygtis:

1) $\log_3(x^2-5x+15)=2$;

2) $\lg(x^2-5x+7)=0$;

3) $\log_{x-1}(x^2-5x+10)=2$;

4) $\log_{x-1}(2+x-3x^2)=2$;

5) $\log_{x-3}4=2$;

6) $\log_{x-2}4=2$;

7) $\lg x=2+\lg 3-\lg 5$;

8) $\lg(54-x^3)=3\lg x$;

9) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$;

10) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$;

11) $\lg\sqrt{x-1}+\lg\sqrt{2x+6}=\lg(x+3)$;

12) $\lg\sqrt{8(x+1)}-\frac{1}{2}\lg(x-13)=3\lg 2$;

13) $\frac{1}{2}\lg(x-9)=1-\frac{1}{2}\lg(2x-1)$;

14) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=3\lg 2+\lg(x-2)$;

15) $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3$;

16) $\lg(x-6)-\frac{1}{2}\lg 2=\lg 3+\frac{1}{2}\lg(x-10)$;

17) $\lg(7-x)-2=\frac{1}{2}\lg(28+x)-\lg 50$;

18) $\lg(x^3+8)-0{,}5\lg(x^2+4x+4)=\lg(58+x)$;

19) $\lg\sqrt{x-30}+\frac{1}{2}\lg(x^2+6x+9)=3\lg 3$;

20) $\lg(x^3+27)-\frac{1}{2}\lg(x+30)=1+2\lg 2$;

21) $2\lg^2 x-5\lg x+2=0$;

22) $\lg^2 x-4\lg x+3=0$;

23) $\frac{1}{4-\lg x}+\frac{2}{2+\lg x}=1$;

24) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$;

25) $\lg x^4-\frac{30}{\lg x}=2$;

26) $\log_2^2 x+3=2\log_2 x^2$;

27) $\lg\sqrt[3]{271+3^{2x}}=2-\lg 10$;

28) $\sqrt{\lg(91+3^{\sqrt{x/3}})}=\sqrt{2}\lg 10$;

29) $\frac{1}{4}\lg(9984+2^{\sqrt{0{,}5x}})=3-\lg 100$;

30) $\lg\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-2}}}=\frac{2}{3}$;

31) $\log_3(3^x-8)=2-x$;

32) $\log_2(9-2^x)=3-x$;

33) $x\lg 2+\lg(2+2^x)=1+\lg 8$;

34) $\log_2(2x-3)+x=2$;

35) $x^{\lg x}=10$;

36) $x^{\lg x}=100x$;

37) $x^{\lg x+2}=1000$;

38) $x^{1-0{,}25\lg x}=10$;

39) $x^{1+\lg x}=(0{,}1)^{-2}$;

40) $0{,}1\cdot x^{\lg x+2}=x^{3-\lg x}$;

41) $\lg(2^x+x-13)=x-x\lg 5$;

42) $\lg(3^x+x-17)=x\lg 30-x$;

43) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$.

9. Išspręskite logaritmines nelygybes:

1) $\log_{0,5}\frac{2x-5}{x+2}<0;$ 2) $\log_2\frac{4x-1}{x+5}<0;$

3) $0{,}3^{\log_3\frac{3x-1}{x-2}}>0{,}3;$ 4) $3^{\log_2\frac{3x-1}{x}}<1;$

5) $\log_{1-x}(x-2)\geqslant-1;$ 6) $\log_x(x^2+1)>2;$

7) $\log_{1/4}(x-1)+\log_{1/4}(x+2)>\log_{1/4}3;$

8) $\log_{1/2}(x+8)-\log_{1/2}(x-3)>\log_{1/2}3x;$

9) $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}>3;$ 10) $x^{\lg x}>10;$

11) $\log_{1/2}(5+4x-x^2)>-3;$

12) $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x;$

13) $\log^2_{0.5}x+\log_{0,5}x-2\leqslant0.$

10. Išspręskite sistemas:

1) $\begin{cases}2^x+3^y=7,\\2^x\cdot3^y=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x+2^y=12,\\x+y=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}8^x=10y,\\2^x=5y;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2^x+2^y=5,\\2^{x+y}=4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}3^x-2^y=7,\\3^x+2^y=11;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3^{x+y}=27,\\2^{xy}=4;\end{cases}$

7) $\begin{cases}3^{x^2+y^2}=243,\\2^{x+y}=8;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}3^x-2^y=77,\\3^{x/2}+2^{y/2}=11;\end{cases}$

9) $\begin{cases}3^x-2^{2y}=65,\\3^{x/2}-2^y=5;\end{cases}$ 10) $\begin{cases}\sqrt{2^{x+y}}=8,\\2^{xy}=256;\end{cases}$

11) $\begin{cases}\lg x-\lg y=7,\\\lg x+\lg y=5;\end{cases}$ 12) $\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg 2,\\x^2+y^2=5;\end{cases}$

13) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)-1=\lg 13,\\\lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2;\end{cases}$

14) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=1+\lg 8,\\\lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3;\end{cases}$

15) $\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y),\\\frac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1;\end{cases}$ 16) $\begin{cases}3^x\cdot9^y=81,\\\lg(x+y)^2=\lg 9;\end{cases}$

17) $\begin{cases}\log_4x+\log_4y=1+\log_49,\\x+y=20;\end{cases}$ 18) $\begin{cases}y-\log_3x=1,\\x^y=3^{12}.\end{cases}$

5.12. Atsakymai

3. 6) $\frac{1}{4}$; 7) $2\frac{1}{3}$; 8) 3, -2; 9) 1, 5; 10) 24; 11) 4; 12) 3,5; 13) 35; 14) 5; 15) -3; 16) 3; 17) 4; 18) $-\frac{1}{3}\sqrt{21}$, $\frac{1}{3}\sqrt{21}$; 19) -1, 8; 20) 8, 27;

21) 13; 22) 10; 23) 2. **4.** 1) 7; 2) 3; 3) 4; 4) 1; 5) 3; 6) 1,5; 7) 4; 8) 4; 9) 2; 10) 4. **5.** 1) 2; 2) 4; 3) 4; 4) 0,5; 5) 2; 6) 1; 7) 3; 8) 9; 9) 16; 10) 1,5; 11) 1,5; 12) 1,5. **6.** 1) 1, 0,63; 2) 3; 3) -1, 1; 4) 2; 5) 36; 6) 8; 7) 1, 2; 8) 5; 9) 0, 1; 10) 0, 1; 11) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; 12) 1,5. **7.** 1) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$, 2) $x \in (-\infty, 1)$; 3) $x \in (1\frac{1}{6}, \infty)$; 4) $x \in \left(\frac{7}{22}, \infty\right)$; 5) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{9}\right)$, 6 $x \in (-\infty, 1)$, 7) $x \notin \left(-\frac{5}{8}, \infty\right)$; 8) $x \in (1{,}9, \infty)$; 9) $x \in (5, \infty)$; 10) $x \in (-\infty, 1)$; 11) $x \in (-\infty, -2)$; 12) $x \neq 0$; 13) $x \notin (-2, 3)$; 14) $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$; 15) $x \neq 1{,}5$; 16) $x \in (0, 1)$; 17) $x \in (3, \infty)$. **8.** 1) 2, 3; 2) 2, 3; 3) 3; 4) $\varnothing$; 5) 5; 6) 4; 7) 60; 8) 3; 9) 4; 10) 8; 11) 5; 12) 15; 13) 13; 14) 3, 5; 15) 37; 16) 12, 18; 17) -3; 18) 9; 19) 50; 20) 6; 21) $\sqrt{10}$, 100; 22) 10, 1000; 23) 10, 100; 24) 100, 1000; 25) $\frac{1}{\sqrt{10^5}}$, 1000; 26) 2, 8; 27) 3; 28) 12; 29) 32; 30) 2; 31) 2; 32) 0, 3; 33) 3; 34) 2; 35) 10, 0,1; 36) 100, 0,1; 37) 10, 0,001; 38) 100; 39) 10, 0,01; 40) 10, $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 41) 13; 42) 17; 43) 100. **9.** 1) $x \in (-\infty, -2) \cup (7, \infty)$; 2) $x \in (0{,}25, 2)$; 3) $x \in \left(-3, \frac{1}{3}\right)$; 4) $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; 5) $\varnothing$; 6) $x \in (1, \infty)$; 7) $x \in (1, 2)$; 8) $x \in (4, \infty)$; 9) $x \in (2, 3)$; 10) $x \in (0, 0{,}1) \cup (10, \infty)$; 11) $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$; 12) $x \in (3, 4{,}5)$; 13) $x \in [0{,}5, 4]$. **10.** 1) (2, 1), ($\log_2 3$, $\log_3 4$); 2) (3, 2), (2, 3); 3) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$; 4) (0, 2), (2, 0); 5) (2, 1); 6) (2, 1), (1, 2); 7) (2, 1), (1, 2); 8) (4, 2); 9) (4, 2); 10) (4, 2), (2, 4); 11) (10^6, 0,1); 12) (2, 1), (1, 2); 13) (9, 7); 14) (8, 4); 15) (6, 2); 16) (-10, 7), (2, 1); 17) (18, 2), (2, 18); 18) (27, 4), $\left(\frac{1}{81}, -3\right)$.

6. VEKTORIAI

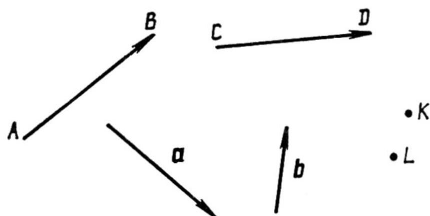
6.1. Pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai

Geometrijoje, fizikoje, mechanikoje, astronomijoje ir kituose moksluose susiduriame su dvejopais dydžiais. Vieni iš jų — kampas, tūris, masė, laikas, temperatūra, energija ir t. t. visiškai apibrėžti skaitinėmis reikšmėmis; kiti — jėga, greitis, pagreitis ir t. t. apibrėžti ne tik skaitinėmis reikšmėmis, bet ir kryptimis erdvėje (plokštumoje). Pavyzdžiui, pasakymas „automobilis važiuoja 80 km/h greičiu“ išsamiai neapibūdina veiksmo (neaišku, į kurią pusę važiuoja automobilis). Pirmieji dydžiai vadinami *skaliariniais* dydžiais, antrieji — *vektoriniais*.

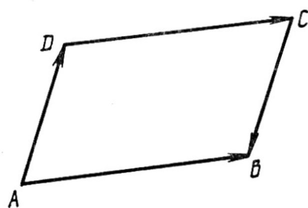
Geometrijoje vektorinius dydžius vaizduosime *kryptinėmis atkarpomis*, t. y. atkarpomis, kurių galų tvarka nurodyta: vienas atkarpos

galas vadinamas pradžia, kitas — pabaiga. Kryptinę atkarpą, kurios pradžia yra taške A, o pabaiga — taške B, žymėsime $\overrightarrow{AB}$.

Kryptines atkarpas vadinsime *vektoriais* (panašiai, kaip žiūrėdami į namo nuotrauką sakome, kad matome namą, o ne jo vaizdą).



147 pav.



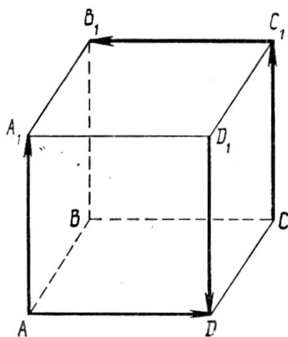
148 pav.

Vektorius žymėsime ir mažosiomis lotyniškomis pusjuodžio šrifto raidėmis, pavyzdžiui, **a**, **b**, **c** ir t. t. (147 pav.).

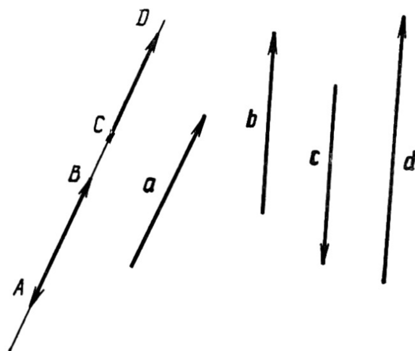
Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ *ilgiu*, arba *moduliu*, vadinsime atkarpos AB ilgį ir žymėsime $|\overrightarrow{AB}|$. Jeigu vektorius pažymėtas viena raide **a**, tai jo ilgis bus $|\mathbf{a}|$.

Spindulio AB nusakytą kryptį vadinsime *vektoriaus* $\overrightarrow{AB}$ *kryptimi*. Du vektoriai vadinami *lygiais*, jeigu jie yra to paties ilgio ir vienodos krypties.

Iš 148 ir 149 paveiksluose pavaizduotų vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ bei $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ yra lygūs.



149 pav.



150 pav.

Remiantis vienakrypčių spindulių savybėmis, galima įrodyti:

1) *kiekvienas vektorius lygus pats sau;*

2) *jeigu vektorius* **a** *lygus vektoriui* **b**, *tai ir vektorius* **b** *lygus vektoriui* **a**;

3) *du vektoriai, lygūs trečiajam, yra lygūs.*

Vektorius, kurio ilgis 1, vadinamas *vienetiniu vektoriumi.*

Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, kurių nusakyti spinduliai AB ir CD yra vienakrypčiai, vadinami *vienakrypčiais vektoriais* (rašoma $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$).

Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, kurių nusakyti spinduliai yra priešingų krypčių, vadinami *priešingų krypčių vektoriais* (rašoma $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$).

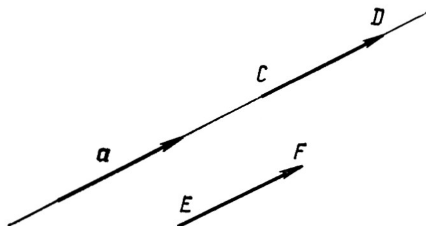
150 paveiksle $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ir **a** yra vienakrypčiai vektoriai, o **c** ir **d** — priešingų krypčių. Pažymėsime, kad vienakrypčiai ir priešingų krypčių vektoriai yra vienoje arba lygiagrečiose tiesėse.

Du priešingų krypčių ir vienodo ilgio vektoriai vadinami *priešingaisiais vektoriais.*

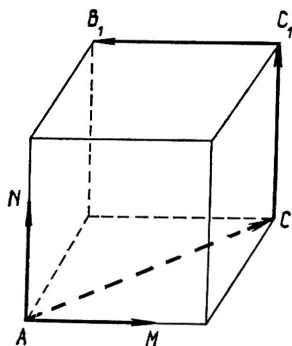
149 paveiksle $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{D_1D}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$, o 150 paveiksle **b** ir **c**, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$ yra priešingieji vektoriai.

Jeigu žinomas vektorius **a**, tai nesunku nubrėžti jam lygų vektorių, kurio pradžia būtų bet kuris taškas C. Toks vektoriaus brėžimas vadinamas *vektoriaus* **a** *atidėjimu nuo taško C.*

149 paveiksle iš taško C nubrėžtas vektorius $\overrightarrow{CC_1}$, lygus vektoriui $\overrightarrow{AA_1}$, o 151 paveiksle iš taškų C ir E nubrėžti vektoriai $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{EF}$, lygūs vektoriui **a**.



151 pav.



152 pav.

Du vienakrypčiai arba priešingų krypčių vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ vadinami *kolineariaisiais vektoriais* (rašoma $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$).

152 paveiksle vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AN}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ yra kolinearūs, o vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AC}$ — nekolinearūs.

Vektorius, kurio pradžia sutampa su jo pabaiga, vadinamas *nu-*

liniu vektoriumi. Nulinį vektorių žymėsime **0** arba $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ ir t. t. 147 paveiksle nuliniai vektoriai yra $\overrightarrow{KK}$ ir $\overrightarrow{LL}$.

Nulinio vektoriaus kryptis neapibrėžta. Visus nulinius vektorius laikysime lygiais ir kolineariais kiekvienam vektoriui.

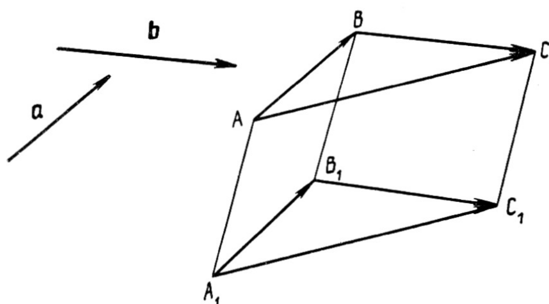
Visi vektoriai, lygūs nurodytajam vektoriui, sudaro objektą — *laisvąjį* vektorių. Laisvasis vektorius visiškai nusakomas kryptine atkarpa.

Vektorius, kurio pradžios taškas iš anksto nurodytas (dažniausiai tai koordinačių pradžia), vadinamas *vietos vektoriumi*, arba *spinduliu vektoriumi.*

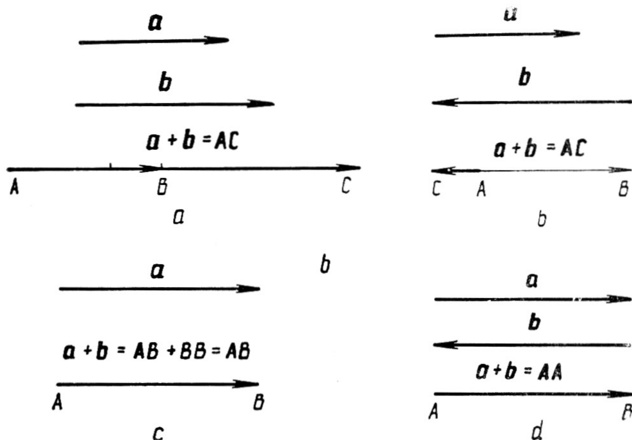
6.2. Vektorių sudėtis ir atimtis

Imkime du vektorius **a** ir **b** (153 pav.). Iš bet kurio taško A nubrėžkime vektorių $\overrightarrow{AB}$, lygų vektoriui **a**, ir iš jo pabaigos B — vektorių $\overrightarrow{BC}$, lygų vektoriui **b**. Vektorius $\overrightarrow{AC}$ vadinamas vektorių **a** ir **b** *suma* ir žymimas **a**+**b**.

154 paveiksle pavaizduota dviejų kolineariųjų vektorių suma.



153 pav.



154 pav.

1 teorema. *Dviejų vektorių suma nepriklauso nuo taško A pasirinkimo.*

Į r o d y m a s. Imkime bet kokį tašką A_1 ir raskime vektorių **a** ir **b** sumą $\overrightarrow{A_1C_1}$ (153 pav.). Kadangi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, tai keturkampiai ABB_1A_1 ir BCC_1B_1 — lygiagretainiai ($AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ ir spinduliai AB ir A_1B_1, BC ir B_1C_1 yra vienakrypčiai), todėl $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$. Iš čia išplaukia, kad $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$ ir keturkampis ACC_1A_1 — lygiagretainis. Taigi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$.

Remdamiesi šia teorema, suformuluosime vadinamąją *trikampio taisyklę dviejų vektorių sumai rasti: norint sudėti vektorius* **a** *ir* **b**, *reikia iš pirmojo vektoriaus* $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ *pabaigos B nubrėžti vektorių* $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$; *vektorius* $\overrightarrow{AC}$ *bus vektorių* **a** *ir* **b** *suma.*

Iš dviejų vektorių sumos apibrėžimo išplaukia: *imant bet kuriuos tris taškus A, B ir C, yra teisinga lygybė*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

2 teorema. *Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:*

1) *su bet kokiais dviem vektoriais* **a** *ir* **b** *teisinga lygybė*

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$ (*perstatymo dėsnis*);

2) *bet kurio vektoriaus* **a** *ir nulinio vektoriaus* **0** *suma lygi vektoriui* **a**, *t. y.*

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a};$$

3) *bet kokio vektoriaus* **a** *ir jam priešingo vektoriaus* **a′** *suma yra nulinis vektorius, t. y.*

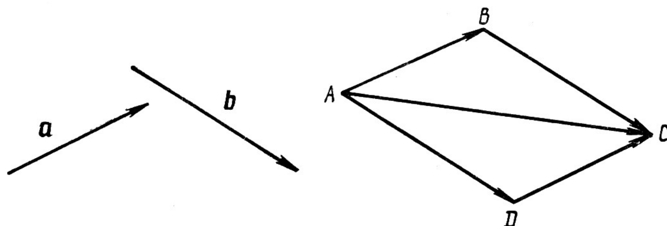
$$\mathbf{a}+\mathbf{a}'=\mathbf{0};$$

4) *su bet kokiais trimis vektoriais* **a**, **b**, **c** *teisinga lygybė*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$ (*jungimo dėsnis*).

Į r o d y m a s. 1) Galimi du atvejai. a) Vektoriai **a** ir **b** nekolinearūs. Nubrėžiame šių vektorių sumą $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (155 pav.). Atkarpas AB ir BC laikydami kraštinėmis braižome lygiagretainį $ABCD$. Šiame lygiagretainyje $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ ir $\mathbf{b}+\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Vadinasi, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

Šiuo atveju teoremą įrodėme ir gavome vadinamąją *lygiagretainio taisyklę* dviejų nekolineariųjų vektorių sumai rasti: *vektoriai* **a** *ir* **b** *nubrėžiami iš vieno taško A; gautąsias atkarpas laikant kraštinėmis braižomas lygiagretainis. Suma* **a**+**b** *yra vektorius, pavaizduotas iš taško A išeinančia lygiagretainio įstrižaine.*



155 pav.

b) Vektoriai **a** ir **b** kolinearūs. Šiuo atveju lygybė $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ išplaukia iš atkarpų sudėties savybės (kai vektoriai vienakrypčiai) ir atkarpų atimties savybės (kai vektoriai priešingų krypčių).

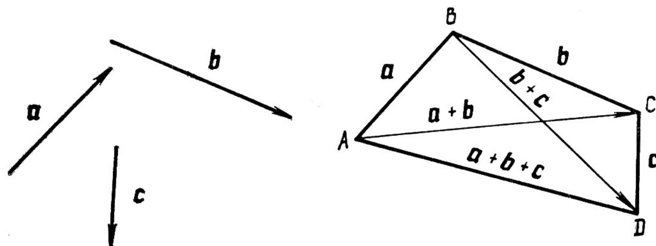
2) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ (154 pav., *c*).

3) Jeigu $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, tai $\mathbf{a}'=\overrightarrow{BA}$ ir $\mathbf{a}+\mathbf{a}'=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$ (154 pav., *d*).

Vektoriui **a** priešingą vektorių žymėsime $-\mathbf{a}$.

4) Iš taško *A* nubrėžkime vektorių $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, iš jo pabaigos *B* — vektorių $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ ir iš taško *C* — vektorių $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$ (156 pav.). Tuomet $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ ir $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$. Taigi

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$



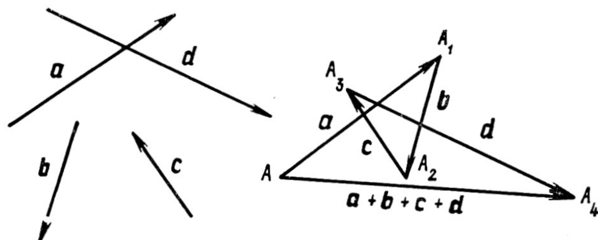
156 pav.

Kadangi vektoriai $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ ir $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ lygūs, tai tas sumas galima rašyti be skliaustelių: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Vektorius $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ yra vektorių **a**, **b** ir **c** suma.

Panašiai apibrėžiama bei randama ir didesnio skaičiaus vektorių $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ suma: iš vektoriaus $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{a}_1$ pabaigos A_1 nubrėžiamas vektorius $\overrightarrow{A_1A_2}=\mathbf{a}_2$, iš taško A_2 — vektorius $\overrightarrow{A_2A_3}=\mathbf{a}_3$ ir t. t., iš taško A_{n-1} — vektorius $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\mathbf{a}_n$. Vektorius $\overrightarrow{AA_n}$ yra vektorių $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ suma:

$$\overrightarrow{AA_n}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\ldots+\mathbf{a}_n \text{ (daugiakampio taisyklė).}$$

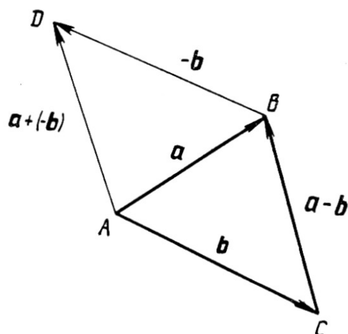
157 paveiksle parodyta keturių vektorių **a**, **b**, **c** ir **d** suma.



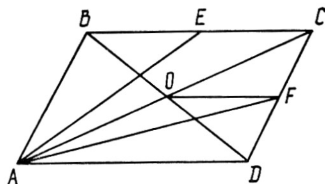
157 pav.

Vektorių **a** ir **b** *skirtumu* (rašoma **a**−**b**) vadinamas toks vektorius **c**, kurį sudėjus su vektoriumi **b** gaunamas vektorius **a**.

Dviejų vektorių **a** ir **b** skirtumą galime rasti šitaip: iš kokio nors taško A nubrėžiame vektorius $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ (158 pav.). Tuomet $\overrightarrow{CB}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, nes $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$. Taigi $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ yra vektorius,



158 pav.



159 pav.

jungiantis vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AB}$ galus. Kad geriau atsimintume dviejų vektorių skirtumo kryptį, paskutinę lygybę užrašome šitaip:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$$

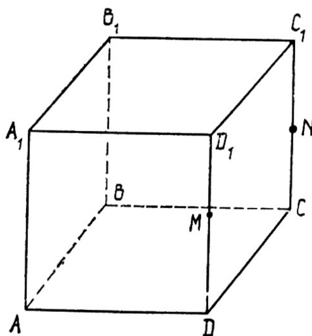
Iš trikampio taisyklės išplaukia, kad $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Bet $\overrightarrow{CA}=$ $=-\overrightarrow{AC}$, todėl $\overrightarrow{CB}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

Taigi gavome dviejų vektorių atimties taisyklę: *norint iš vektoriaus* **a** *atimti vektorių* **b**, *reikia prie vektoriaus* **a** *pridėti vektorių* $-\mathbf{b}$ (158 pav.).

Pavyzdžiai. 1. Lygiagretainyje $ABCD$ E ir F yra kraštinių BC ir CD vidurio taškai, O — įstrižainių susikirtimo taškas (159 pav.). Rasime vektorius: 1) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OF}$; 2) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}$; 4) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DF}$.

Sprendimas. 1) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}$; 3) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=0$; 4) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}=$ $=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$.

2. Stačiakampyje gretasienyje $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M ir N — briaunų DD_1 ir CC_1 vidurio taškai (160 pav.). Rasime vektorius: 1) $\overrightarrow{AB}+$ $+\overrightarrow{C_1D_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$; 4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{MD_1}$; 5) $\overrightarrow{AC}+$ $+\overrightarrow{NC_1}-\overrightarrow{AD_1}$.



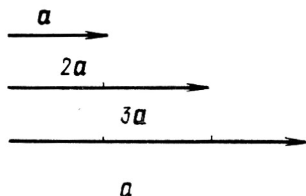
160 pav.

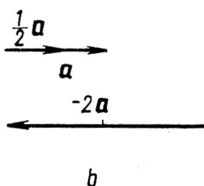
Sprendimas. 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}=$ $=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AC_1}$; 4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+$ $+\overrightarrow{MD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}$; 5) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{NC_1}-\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AC}-$ $-\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{NC_1}=\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{NC_1}=\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{D_1N}$.

6.3. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus

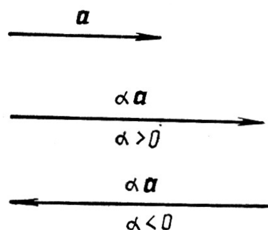
Imkime vektorių **a** ir nagrinėkime sumas **a**+**a**, **a**+**a**+**a** ir t. t. (161 pav., *a*). Panašiai kaip algebroje, šias sumas žymėsime 2**a**, 3**a** ir t. t. Remdamiesi tik vektorių sudėtimi, galime apibrėžti vektorius $\frac{1}{2}\mathbf{a}$, $(-2)\mathbf{a}$ ir t. t. (161 pav., *b*). Pavyzdžiui, $(-2)\mathbf{a}$ apibrėžiame kaip vektorių, priešingą vektoriui 2**a**: $2\mathbf{a}+(-2)\mathbf{a}=0$.

Remdamiesi šiais pavyzdžiais apibrėšime vektoriaus daugybą iš skaičiaus.





161 pav.



162 pav.

Nenulinio vektoriaus **a** *ir skaičiaus* α *sandauga* vadinsime vektorių, kurio ilgis lygus $|\alpha|\cdot|\mathbf{a}|$, o kryptis sutampa su vektoriaus **a** kryptimi, kai $\alpha>0$, ir priešinga vektoriaus **a** krypčiai, kai $\alpha<0$ (162 pav.). Vektoriaus **a** ir skaičiaus α saudaugą žymėsime $\alpha\mathbf{a}$.

Nulinio vektoriaus ir bet kokio skaičiaus α sandauga, taip pat bet kokio vektoriaus ir skaičiaus 0 sandauga yra nulinis vektorius.

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi šiomis savybėmis:

1) $\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}$ (jungimo);
2) $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$ (pirmoji skirstymo);
3) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ (antroji skirstymo).

Įrodysime, pavyzdžiui, pirmąją savybę. Sakykime, kad $\alpha(\beta\mathbf{a})=\mathbf{b}$, o $(\alpha\beta)\mathbf{a}=\mathbf{c}$. Reikia įrodyti, kad $\mathbf{b}=\mathbf{c}$, t. y. kad $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$ ir $\mathbf{b}\uparrow\uparrow\mathbf{c}$. Jeigu bent vienas iš skaičių α, β lygus nuliui arba vektorius **a** lygus nuliniam vektoriui, tai pirmoji savybė teisinga. Remdamiesi vektoriaus ir skaičiaus sandaugos apibrėžimu bei modulio savybėmis, gauname

$$|\mathbf{b}|=|\alpha(\beta\mathbf{a})|=|\alpha|\,|\beta\mathbf{a}|=|\alpha|\,|\beta|\,|\mathbf{a}|=|\alpha\beta|\,|\mathbf{a}|=|\mathbf{c}|.$$

Jeigu α ir β yra vienodų ženklų, tai $\alpha(\beta\mathbf{a})\uparrow\uparrow\mathbf{a}$ ir $(\alpha\beta)\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{a}$, t. y. $\mathbf{b}=\mathbf{c}$. Jeigu α ir β — priešingų ženklų, tai $\alpha(\beta\mathbf{a})\uparrow\downarrow\mathbf{a}$ ir $(\alpha\beta)\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{a}$. Šiuo atveju irgi $\mathbf{b}=\mathbf{c}$. Vadinasi, visais atvejais

$$\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}.$$

Panašiai galime įrodyti ir kitas dvi savybes.

Vektorius $(-1)\mathbf{a}$ priešingas vektoriui **a**, t. y. $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$. Iš tikrųjų $|(-1)\mathbf{a}|=|(-1)|\,|\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|$ ir vektoriaus $(-1)\mathbf{a}$ kryptis priešinga vektoriaus **a** krypčiai.

1 teorema. *Vektorius* **a** *kolinearus nenuliniam vektoriui* **b** *tada ir tik tada, kai galima rasti skaičių* α, *kuris tenkintų sąlygą*

$$\boxed{\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}.}$$

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, vektorius **a** kolinearus nenuliniam vektoriui **b**. Galimi šie atvejai:

$$\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

Jeigu $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$, tai $\mathbf{a}=\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}$, t. y. $\alpha=\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

Jeigu $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$, tai $\mathbf{a}=-\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}$, t. y. $\alpha=-\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

Jeigu $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, tai $\mathbf{a}=0\cdot\mathbf{b}$, t. y. $\alpha=0$.

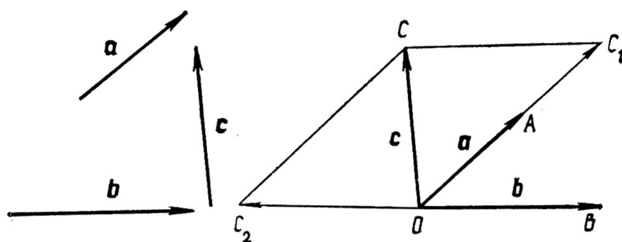
Pakankamumas. Jeigu $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}$, tai iš vektorių kolinearumo bei vektoriaus ir skaičiaus sandaugos apibrėžimų išplaukia, kad vektoriai **a** ir **b** kolinearūs.

Jeigu vektoriai **a**, **b** ir **c** susieti lygybe $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, α ir β kartu nelygūs nuliui, tai sakoma, kad vektorius **c** yra vektorių **a** ir **b** *tiesinis darinys*.

2 teorema. *Bet koks plokštumos vektorius* **c** *vieninteliu būdu išreiškiamas bet kokių dviejų nekolineariųjų vektorių* **a** *ir* **b** *tiesiniu dariniu (kartais sakoma tiesiog vektoriais* **a** *ir* **b**):

$$\boxed{\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}.}$$

Įrodymas. Imkime tris plokštumos vektorius **a**, **b**, **c**. Sakykime, vektorius **a** nekolinearus vektoriui **b**. Iš pasirinkto taško O nubrėžkime vektorius $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ (163 pav.). Galimi du atvejai: 1) vektorius **c** kolinearus vienam iš vektorių **a** ir **b** (pavyz-

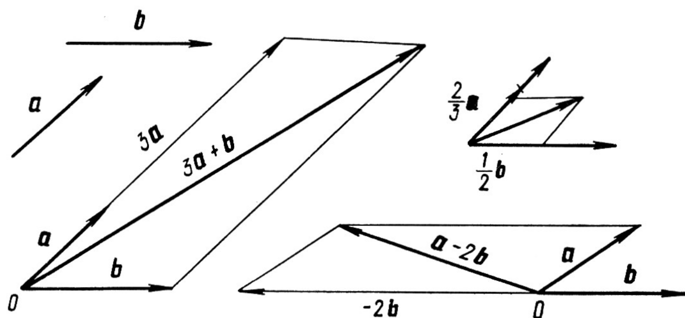


163 pav.

džiui, vektoriui **b**); 2) vektorius **c** nekolinearus nei vektoriui **a**, nei vektoriui **b**. Pirmuoju atveju, remiantis 1 teorema, randamas toks skaičius β, kad $\mathbf{c}=\beta\mathbf{b}=0\cdot\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$. Taigi šiuo atveju vektorius **c** yra

išreikštas vektorių **a** ir **b** tiesiniu dariniu. Antruoju atveju per tašką C nubrėžę tieses, lygiagrečias tiesėms OA ir OB, gauname $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}$. Tačiau vektorius $\overrightarrow{OC_1}$ kolinearus vektoriui **a**, o vektorius $\overrightarrow{OC_2}$ — vektoriui **b**. Vadinasi, galima rasti tokius skaičius α ir β, kad $\overrightarrow{OC_1}=\alpha\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC_2}=\beta\mathbf{b}$ ir $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$.

Įrodysime, kad tokia vektoriaus **c** išraiška vektoriais **a** ir **b** yra vienintelė. Sakykime, $\mathbf{c}=\gamma\mathbf{a}+\varepsilon\mathbf{b}$. Tuomet $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\gamma\mathbf{a}+\varepsilon\mathbf{b}$ ir $(\alpha-\gamma)\mathbf{a}=(\varepsilon-\beta)\mathbf{b}$. Jeigu bent vienas iš skaičių $\alpha-\gamma$ ir $\varepsilon-\beta$ būtų nelygus nuliui, tai išeitų, kad vektoriai **a** ir **b** yra kolinearūs (1 teorema). Tai prieštarauja teoremos sąlygai. Vadinasi, $\alpha=\gamma$, $\beta=\varepsilon$.



164 pav.

Pavyzdžiai. 1. Duoti du vektoriai **a** ir **b**. 164 paveiksle pavaizduoti vektoriai: 1) $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; 3) $\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$.

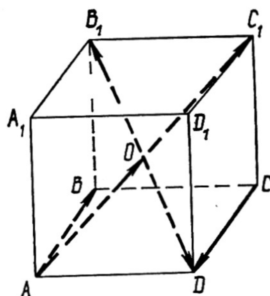
2. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės kertasi taške O (165 pav.). Rasime skaičių α, kai: 1) $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}=\alpha\overrightarrow{AO}$; 3) $\overrightarrow{OB_1}=\alpha\overrightarrow{B_1D}$.

1) Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra priešingi, tai $\alpha=-1$; 2) Kubo įstrižainės susikirtimo taške dalijasi pusiau ir $\overrightarrow{AC_1}=2\overrightarrow{AO}$; $\alpha=2$; 3) $\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$.

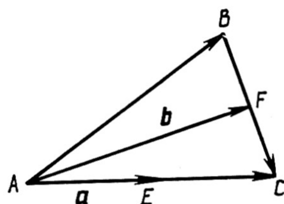
3. E ir F — trikampio ABC kraštinių AC ir BC vidurio taškai. Vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AC}$ išreikšime vektoriais $\mathbf{a}=\overrightarrow{AE}$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{AF}$ (166 pav.).

Matome, kad $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}=2\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{FC}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF})=2(2\mathbf{a}-\mathbf{b})=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=2\mathbf{a}-(4\mathbf{a}-2\mathbf{b})=2\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

4. Įrodysime, kad keturkampio $ABCD$ kraštinių vidurio taškai M, N, P ir Q yra lygiagretainio viršūnės (167 pav.).



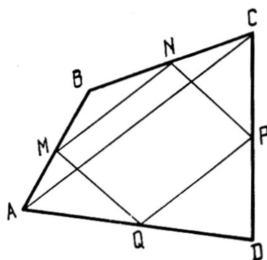
165 pav.



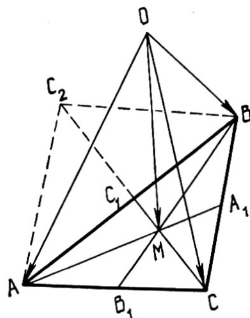
166 pav.

Kadangi $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, tai $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$. Taigi keturkampis $MNPQ$ — lygiagretainis.

5. Trikampio ABC pusiaukraštinės susikerta taške M. Įrodysime, kad $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, kai O — bet koks erdvės taškas (168 pav.).



167 pav.



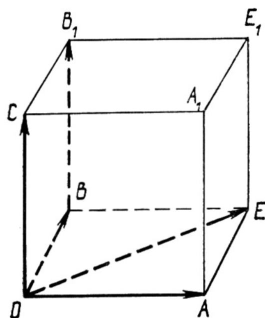
168 pav.

Kadangi M — trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas, tai $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Be to, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$ (trikampio taisyklė). Vektorių $\overrightarrow{CM}$ išreikšime vektoriais $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$. Kadangi $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ ir $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$, tai $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})$ ir $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})$. Vadinasi, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

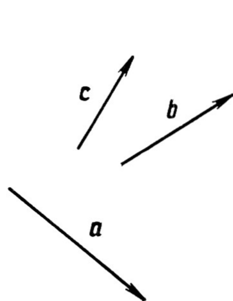
Jeigu taškas O sutampa su tašku M, tai $\overrightarrow{MM}=\mathbf{0}$ ir $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+$ $+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$.

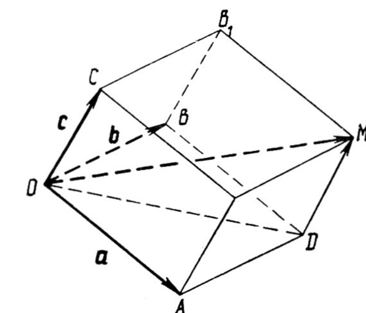
6.4. Komplanarieji vektoriai. Gretasienio taisyklė

Vektoriai vadinami *komplanariaisiais*, jeigu nubrėžus iš vieno taško jų galai su bendru pradžios tašku priklauso vienai plokštumai. Aišku, kad bet kokie du vektoriai yra komplanarūs; trys vektoriai, tarp kurių vienas nulinis, irgi komplanarūs. Trys nenuliniai vekto-



169 pav.





170 pav.

riai gali būti komplanarūs arba nekomplanarūs. 169 paveiksle vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra nekomplanarūs, nes taškas C nepriklauso plokštumai OAB. Vektoriai $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra komplanarūs, nes atidėjus nuo taško O jų galai priklauso plokštumai OEE_1.

Galima suformuluoti trijų vektorių komplanarumo požymį: *jeigu vieną iš trijų vektorių galima išreikšti kitais dviem vektoriais, tai tie trys vektoriai yra komplanarūs* (**26** užd., 3).

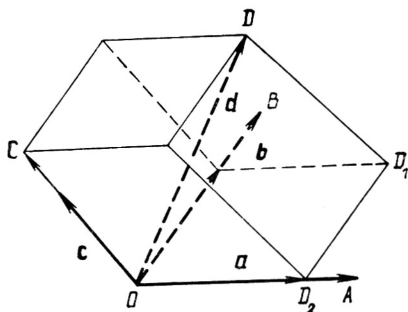
Dabar ieškosime trijų nekomplanarių vektorių sumos. Taikysime vadinamąją „gretasienio taisyklę“. Sakykime, vektoriai **a**, **b** ir **c** nekomplanarūs (170 pav.). Iš laisvai pasirinkto taško O nubrėžkime vektorius $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ ir $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Nubraižykime gretasienį, kurio briaunos yra atkarpos OA, OB ir OC. Kadangi $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DM}$, tai $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. OM — gretasienio įstrižainė.

1 teorema. *Bet kokį vektorių* **d** *vieninteliu būdu galima išreikšti bet kurių nekomplanarių vektorių* **a**, **b** *ir* **c** *tiesiniu dariniu*

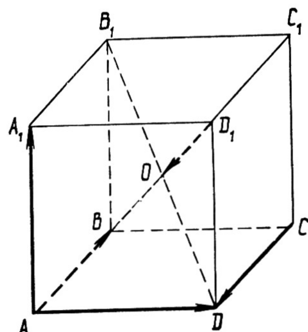
$$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}.$$

Įrodymas. Jeigu vektorius **d** kolinearus vienam iš duotųjų vektorių, pavyzdžiui, vektoriui **c**, tai yra toks skaičius γ, kad $\mathbf{d}=\gamma\mathbf{c}=0\cdot\mathbf{a}+0\cdot\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$. Šiuo atveju vektorius **d** yra išreikštas vektoriais **a**, **b** ir **c**.

Sakykime, kad vektorius **d** nekolinearus nė vienam iš vektorių **a**, **b**, **c**. Nubrėžkime visus vektorius nuo laisvai pasirinkto taško O: $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ ir $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$ (171 pav.). Per tašką D brėžiame tiesę, lygiagrečią tiesei OC. Ši tiesė kerta plokštumą OAB



171 pav.



172 pav.

taške D_1. Per tašką D_1 brėžiame tiesę, lygiagrečią tiesei OB. Ji kerta tiesę OA taške D_2. Pagal daugiakampio taisyklę $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD_2}+\overrightarrow{D_2D_1}+\overrightarrow{D_1D}$. Tačiau $\overrightarrow{OD_2}=\alpha\mathbf{a}$, $\overrightarrow{D_2D_1}=\beta\mathbf{b}$, $\overrightarrow{D_1D}=\gamma\mathbf{c}$ ir

$$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}.$$

Šio skaidinio vienatis įrodinėjama kaip ir 6.3 skyrelio 2 teoremoje.

Pavyzdžiai. 1. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės kertasi taške O. Išreikšime vektorius $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{D_1O}$ vektoriais $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ (172 pav.).

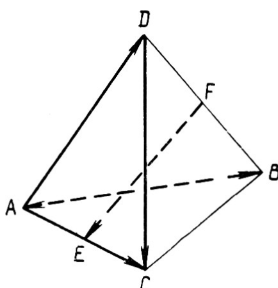
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(-1)\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AD}+0\cdot\overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB} \text{ ir}$$

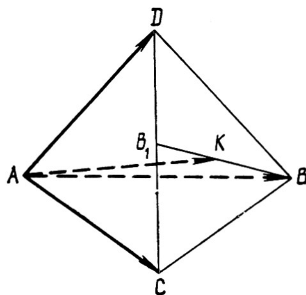
$$\overrightarrow{D_1O}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

2. Duotas tetraedras $ABCD$, E, F — briaunų AC ir BD vidurio taškai (173 pav.). Ištirsime, ar komplanarūs vektoriai: 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$.

1) Kadangi taškas D nepriklauso plokštumai ABC, tai duotieji vektoriai nekomplanarūs. 2) Remdamiesi daugiakampio taisykle, rašome $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ ir $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}$. Sudėję šias lygybes, gauname $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$, nes $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FD}=\mathbf{0}$ ir $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}=\mathbf{0}$. Taigi $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})$ — duotieji vektoriai yra komplanarūs (komplanarumo požymis).



173 pav.



174 pav.

3. Duotas tetraedras $ABCD$; K — sienos BCD pusiaukraštinės BB_1 vidurio taškas. Vektorių $\overrightarrow{AK}$ išreikšime vektoriais $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$ ir $\mathbf{c}=\overrightarrow{AD}$ (174 pav.).

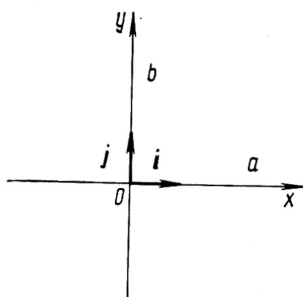
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}$ (trikampio taisyklė). $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$. Vadinasi,

$$\overrightarrow{AK}=\mathbf{a}+\frac{1}{4}(\mathbf{c}+\mathbf{b}-2\mathbf{a})=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{4}\mathbf{b}+\frac{1}{4}\mathbf{c}.$$

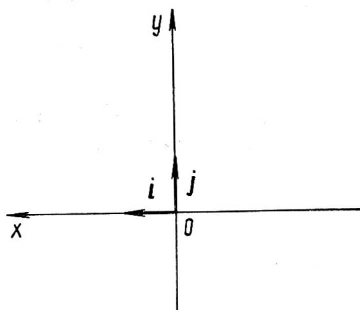
6.5. Stačiakampė Dekarto koordinačių sistema

6.5.1. Stačiakampė Dekarto koordinačių sistema plokštumoje. Vektoriaus koordinatės. Vektoriaus ilgis. Sakykime, plokštumoje nubrėžtos dvi statmenos tiesės a ir b, susikertančios taške O. Nuo taško O tiesėje a atidėkime vienetinį vektorių $\mathbf{i}$, o tiesėje b — vienetinį vektorių $\mathbf{j}$ (175 pav.). Gavome vadinamąją *stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą plokštumoje.* Taškas O vadinamas *koordinačių pradžia,* tiesė a — *abscisių ašimi,* tiesė b — *ordinačių ašimi.* Abscisių ašį žymėsime Ox, ordinačių ašį — Oy. Taškas O kiekvieną koordinačių ašį dalija į du spindulius. Spinduliai, kuriuose yra vienetiniai vektoriai, vadinami *teigiamosiomis pusašėmis.* 175 paveiksle

pavaizduota koordinačių sistema vadinama *dešinine,* o 176 paveiksle — *kairine.* Mes naudosimės tik dešinine koordinačių sistema.



175 pav.



176 pav.

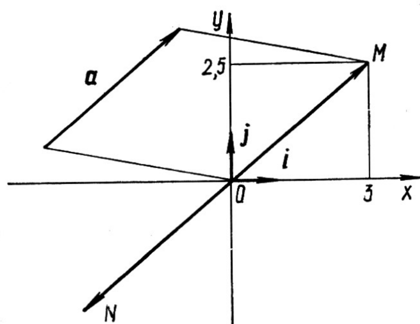
Remiantis 6.3 skyrelio 2 teorema kiekvieną plokštumos vektorių **a** vieninteliu būdu galima išreikšti vektorių **i** ir **j** tiesiniu dariniu (177 pav.):

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}.$$

Skaičiai x ir y vadinami *vektoriaus* **a** *koordinatėmis* ir rašoma $\mathbf{a}=(x, y)$.

Spindulio vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ koordinates vadinsime *taško M koordinatėmis* ir rašysime $M(x, y)$.

177 paveiksle $\overrightarrow{OM}=(3, 2{,}5)$, $\overrightarrow{ON}(-3, -2{,}5)$.



177 pav.

Iš vektoriaus išraiškos vektorių **i** ir **j** dariniu vienaties išplaukia: *jeigu du vektoriai* $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$ *ir* $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$ *yra lygūs, tai ir jų atitinkamos koordinatės lygios:* $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: *jeigu vektorių atitinkamos koordinatės lygios, tai tie vektoriai yra lygūs.*

Atkreipsime dėmesį, kad $\mathbf{0}=(0, 0)$, $\mathbf{i}=(1, 0)$, $\mathbf{j}=(0, 1)$.

1 teorema. *Jeigu* $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$, *tai:*

1) *sudedant vektorius, jų atitinkamos koordinatės sudedamos:*

$$\boxed{\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2);}$$

2) *dauginant vektorių iš skaičiaus, vektoriaus koordinatės dauginamos iš to skaičiaus:*

$$\boxed{\alpha\mathbf{a}=(\alpha x_1,\ \alpha x_2);}$$

3) *atimant vektorius, jų atitinkamos koordinatės atimamos:*

$$\boxed{\mathbf{a}-\mathbf{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2).}$$

Įrodymas. Remdamiesi vektorių sudėties ir daugybos iš skaičiaus savybėmis, gauname:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})+(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j})=(x_1+x_2)\mathbf{i}+(y_1+y_2)\mathbf{j}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$;

2) $\alpha\mathbf{a}=\alpha(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})=\alpha x_1\mathbf{i}+\alpha y_1\mathbf{j}=(\alpha x_1, \alpha y_1)$;

3) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})+(-x_2\mathbf{i}-y_2\mathbf{j})=(x_1-x_2)\mathbf{i}+(y_1-y_2)\mathbf{j}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$.

2 teorema. *Vektorius* $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$ *kolinearus nenuliniam vektoriui* $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$ *tada ir tik tada, kai egzistuoja skaičius* α, *tenkinantis šias sąlygas:*

$$\boxed{x_1=\alpha x_2,\ y_1=\alpha y_2.} \tag{1}$$

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, vektorius **a** yra kolinearus vektoriui **b**. Pagal 6.3 skyrelio 1 teoremą yra toks skaičius α, kad $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}$, arba $(x_1, y_1)=(\alpha x_2, \alpha y_2)$. Iš čia išplaukia (1) lygybės.

Pakankamumas. Sakykime, teisingos (1) lygybės. Tuomet $x_1\mathbf{i}=\alpha x_2\mathbf{i}$, $y_1\mathbf{j}=\alpha y_2\mathbf{j}$. Gautas lygybes panariui sudėję, turime: $x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}=\alpha x_2\mathbf{i}+\alpha y_2\mathbf{j}=\alpha(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j})$ arba $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}$. Pagal 6.3 skyrelio 1 teoremą vektoriai **a** ir **b** yra kolinearūs.

Išvada. *Vektorius* $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$ *kolinearus vektoriui* $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$ *tada ir tik tada, kai antrosios eilės determinantas, sudarytas iš tų vektorių koordinačių, yra lygus nuliui, t. y.*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, vektorius **a** yra kolinearus vektoriui **b**. Jeigu $\mathbf{b}=0$, tai $x_2=y_2=0$ ir yra teisinga (2) lygybė. Jeigu $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, tai $x_1=\alpha x_2$, $y_1=\alpha y_2$ ir

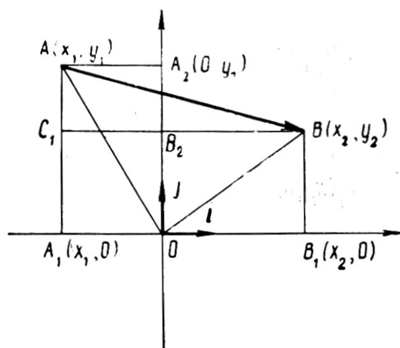
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha x_2 & \alpha y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0.$$

P a k a n k a m u m a s. Sakykime, kad galioja (2) lygybė, kurią galime užrašyti šitaip:

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0. \qquad (3)$$

Jeigu $x_2 = y_2 = 0$, tai vektorius **b** yra nulinis, taigi kolinearus vektoriui **a**. Sakykime, kad $x_2 \neq 0$. (3) lygybę padaliję iš x_2, gauname: $\frac{x_1}{x_2} y_2 - y_1 = 0$ arba $\alpha y_2 - y_1 = 0$, jei $\frac{x_1}{x_2} = \alpha$. Taigi $x_1 = \alpha x_2$, $y_1 = \alpha y_2$. Pagal 2 teoremą vektorius **a** yra kolinearus vektoriui **b**.

U ž d a v i n y s. Duoti du taškai $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ (178 pav.). Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates.



178 pav.

S p r e n d i m a s. Kadangi $\overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OB} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ ir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tai $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Taigi vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinatės yra lygios vektoriaus pabaigos ir pradžios atitinkamų koordinačių skirtumui. Nesunku pastebėti, kad $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$.

Prisiminsime, kad vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgiu arba moduliu vadinamas atkarpos $\overrightarrow{AB}$ ilgis. Sakykime, vektorius $\overrightarrow{AB}$ nekolinearus nei vektoriui **i**, nei vektoriui **j**. Per taškus A ir B nubrėžiame tieses, lygiagrečias koordinačių ašims (178 pav.). $A_1(x_1,\ 0)$, $B_1(x_2,\ 0)$, $A_2(0,\ y_1)$, $B_2(0,\ y_2)$ — tų tiesių susikirtimo su koordinačių ašimis taškai. Iš devynmetės mokyklos matematikos kurso žinome, kad atstumas tarp koordinačių tiesės taškų $M(x_M)$ ir $N(x_N)$ reiškiamas formule $MN = |x_N - x_M|$. Kadangi $A_1B_1 = |x_2 - x_1|$, $A_2B_2 = |y_2 - y_1|$ ir $A_1B_1 = C_1B$, $A_2B_2 = AC_1$, tai iš stačiojo trikampio AC_1B gauname

$$AB^2 = AC_1^2 + C_1B^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

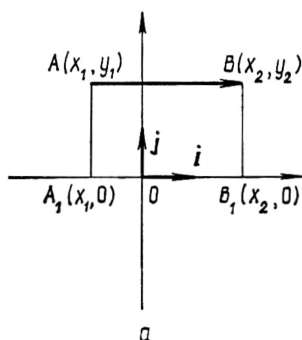
Vadinasi,

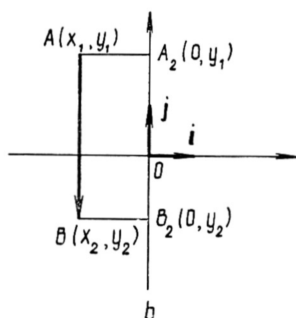
$$|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (4)$$

Jeigu vektorius $\mathbf{a} = (x, y)$, tai

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Kai vektorius $\overrightarrow{AB}$ kolinearus vektoriui $\mathbf{i}$ (179 pav., *a*), tai $y_1 = y_2$ ir $|\overrightarrow{AB}| = A_1B_1 = |x_2 - x_1|$. Kai vektorius $\overrightarrow{AB}$ kolinearus vektoriui $\mathbf{j}$ (179 pav., *b*), tai $|\overrightarrow{AB}| = A_2B_2 = |y_2 - y_1|$.





179 pav.

Pavyzdžiai. 1. Duoti vektoriai $\mathbf{a} = (3, -2)$, $\mathbf{b} = (4, 1)$ ir $\mathbf{c} = (-2, 3)$. Rasime vektoriaus $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ koordinates.

Kadangi $2\mathbf{a} = (6, -4)$, $-3\mathbf{b} = (-12, -3)$, tai $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} = (6 - 12 - 2, -4 - 3 + 3) = (-8, -4)$.

2. Duoti vektoriai $\mathbf{a} = (2, 5)$, $\mathbf{b} = (-3, 4)$ ir $\mathbf{c} = (1, 0)$. Rasime, su kokia α reikšme vektoriai $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ ir $\mathbf{e} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ yra kolinearūs.

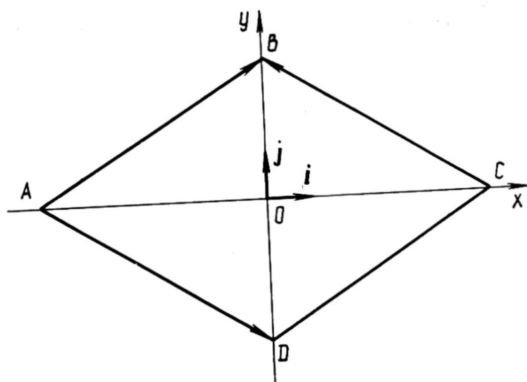
Pirmiausia rasime vektorių $\mathbf{d}$ ir $\mathbf{e}$ koordinates: $\mathbf{d} = (2 - 3\alpha, 5 + 4\alpha)$, $\mathbf{e} = (-2, 4)$. Vektoriai $\mathbf{d}$ ir $\mathbf{e}$ bus kolinearūs, kai jų koordinatės tenkins (2) lygybę, t. y. kai

$$\begin{vmatrix} 2-3\alpha & 5+4\alpha \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{arba} \quad 9 - 2\alpha = 0; \quad \alpha = 4{,}5.$$

3. Vektoriaus $\mathbf{a} = (2, -7)$ pradžia yra taške $A(-3, 8)$. Rasime vektoriaus $\mathbf{a}$ pabaigos koordinates.

Jeigu $B(x, y)$ yra vektoriaus $\mathbf{a}$ pabaiga, tai $x - (-3) = 2$ ir $y - 8 = -7$. Iš čia $x = -1$, $y = 1$, t. y. $B(-1, 1)$.

4. Rombo $ABCD$ įstrižainė AC lygi 10, o BD lygi 6 ilgio vienetams. Koordinačių sistema parinkta, kaip parodyta 180 paveiksle.



180 pav.

Rasime vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$ koordinates ir vektoriaus $\overrightarrow{AD}$ ilgį.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\mathbf{j}-(-5\mathbf{i})=5\mathbf{i}+3\mathbf{j}=(5,\ 3),$$

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=-5\mathbf{i}+3\mathbf{j}=(-5,\ 3),\quad \overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}=(5,\ -3),$$

$$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}.$$

6.5.2. Stačiakampė Dekarto koordinačių sistema erdvėje. Vektoriaus koordinatės. Vektoriaus ilgis. Jeigu per erdvės tašką O nubrėšime tris tarpusavyje statmenas tieses ir nuo taško O jose atidėsime tris vienetinius vektorius **i**, **j** ir **k**, tai sakysime, kad erdvėje duota *stačiakampė Dekarto koordinačių sistema* (181 pav.). Tiesės vadinamos *koordinačių ašimis*, o taškas O — *koordinačių pradžia*. Koordinačių ašis žymėsime Ox, Oy, Oz ir vadinsime atitinkamai *abscisių, ordinačių* ir *aplikačių ašimis*. Taškas O tas ašis dalija į du spindulius. Spinduliai, kuriuose yra vienetiniai vektoriai, vadinami *teigiamosiomis pusašėmis*, kiti — *neigiamosiomis pusašėmis*. Trys plokštumos, einančios per koordinačių ašis Ox ir Oy, Oy ir Oz, Oz ir Ox, vadinamos *koordinačių plokštumomis* ir žymimos atitinkamai Oxy, Oyz ir Ozx.

Remiantis 6.4 skyrelio 1 teorema, kiekvieną erdvės vektorių **a** vieninteliu būdu galima išreikšti vektorių **i**, **j** ir **k** tiesiniu dariniu (181 pav.):

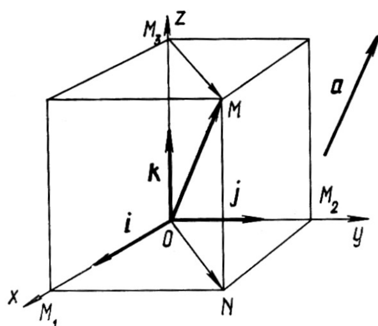
$$\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

Skaičiai x, y, z vadinami vektoriaus **a** koordinatėmis ir rašoma: $\mathbf{a}=(x,\ y,\ z)$.

181 paveiksle pavaizduoti vektoriai $\overrightarrow{OM}=(1{,}5,\ 1{,}5,\ 2)$, $\overrightarrow{M_3M}=(1{,}5,\ 1{,}5,\ 0)$, $\mathbf{i}=(1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{j}=(0,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{k}=(0,\ 0,\ 1)$.

Kaip ir plokštumoje, *taško M koordinatėmis* laikysime spindulio vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ koordinates.

Iš vektoriaus išraiškos vektoriais **i**, **j** ir **k** vienaties išplaukia: *lygių vektorių atitinkamos koordinatės lygios ir atvirkščiai.*



181 pav.

1 teorema. *Jeigu* $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$ *ir* $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$, *tai:*

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$;
2) $\alpha\mathbf{a}=(\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1)$;
3) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$.

2 teorema. *Vektorius* $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$ *yra kolinearus vektoriui* $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$ *tada ir tik tada, kai yra toks skaičius* α, *su kuriuo teisingos lygybės*

$$x_1=\alpha x_2, \quad y_1=\alpha y_2, \quad z_1=\alpha z_2. \tag{1}$$

1 ir 2 teoremos įrodomos panašiai kaip atitinkamos 6.5.1 skyrelio teoremos. Įrodykite jas.

Jeigu žinomi taškai $A(x_1, y_1, z_1)$ ir $B(x_2, y_2, z_2)$, tai $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}-(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$.

Pažymėsime, kad $\overrightarrow{BA}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$.

Rasime vektoriaus $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ilgį. 181 paveiksle matyti, kad $\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$; čia OM — stačiakampio gretasienio įstrižainė. Iš stačiojo trikampio ONM: $OM^2=ON^2+NM^2$. Iš stačiojo trikampio OM_1N: $ON^2=OM_1^2+M_1N^2=OM_1^2+OM_2^2$. Taigi $OM^2=OM_1^2+OM_2^2+NM^2=OM_1^2+OM_2^2+OM_3^2=x^2+y^2+z^2$ ir

$$|\overrightarrow{OM}|=OM=|\mathbf{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

Jeigu žinomi taškai $A(x_1, y_1, z_1)$ ir $B(x_2, y_2, z_2)$, tai vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgis yra lygus

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (3)$$

Pavyzdžiai. 1. Duoti vektoriai $\mathbf{a}=(-1, 2, 0)$, $\mathbf{b}=(0, -1, -2)$ ir $\mathbf{c}=(2, 1, -3)$. Rasime vektoriaus $\mathbf{d}=-2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+\mathbf{c}$ koordinates ir ilgį.

Pirmiausia rasime vektorių $-2\mathbf{a}$ ir $3\mathbf{b}$ koordinates: $-2\mathbf{a}=(2, -4, 0)$, $3\mathbf{b}=(0, -3, -6)$. Tuomet $\mathbf{d}=-2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+\mathbf{c}=(2+0+2, -4-3+1, 0-6-3)=(4, -6, -9)$ ir $|\mathbf{d}|=\sqrt{4^2+(-6)^2+(-9)^2}=$ $=\sqrt{16+36+81}=\sqrt{133}$.

2. Apskaičiuosime ilgius vektorių: 1) $\mathbf{a}=(2\sqrt{3}, -6, 1)$, 2) $\mathbf{b}=$ $=\mathbf{i}-\sqrt{15}\,\mathbf{k}$, 3) $\mathbf{c}=-3\mathbf{k}$, 4) $\overrightarrow{AB}$, kai $A(-2, 3, 0)$, $B(0, 2, -2)$.

1) $|\mathbf{a}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-6)^2+1^2}=\sqrt{12+36+1}=\sqrt{49}=7$;
2) $|\mathbf{b}|=\sqrt{1^2+0^2+(-\sqrt{15})^2}=\sqrt{1+15}=4$; 3) $|\mathbf{c}|=\sqrt{0^2+0^2+(-3)^2}=$ $=\sqrt{9}=3$; 4) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(0+2)^2+(2-3)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4+1+4}=3$.

3. Vektoriaus $\mathbf{a}$ ilgis lygus 3,5, o jo pradžios taškas yra $A(0, -3, 5)$. Rasime vektoriaus $\mathbf{a}$ pabaigos koordinates, jei vektorius $\mathbf{a}$ kolinearus vektoriui $\mathbf{b}=(-1, 2, 3)$.

Sakykime, vektoriaus $\mathbf{a}$ pabaigos koordinatės yra $B(x, y, z)$. Vektorius $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ bus kolinearus vektoriui $\mathbf{b}$, jeigu jų koordinatės tenkins (1) lygybes, t. y.

$$x=\alpha(-1), \quad y+3=\alpha 2, \quad z-5=\alpha 3.$$

Be to, $|\overrightarrow{AB}|^2=(x-0)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=3{,}5$. Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $\alpha^2+4\alpha^2+9\alpha^2=3{,}5$. Iš čia $\alpha^2=\frac{1}{4}$, $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=-\frac{1}{2}$. Įrašę rastąsias α reikšmes į anksčiau gautas lygybes, turime:

$$x_1=-\frac{1}{2}, \quad y_1=-2, \quad z_1=\frac{13}{2} \text{ ir } x_2=\frac{1}{2}, \quad y_2=-4, \quad z_2=\frac{7}{2}.$$

Taigi vektoriaus $\mathbf{a}$ pabaiga yra taške $B_1(-0{,}5, -2, 6{,}5)$ arba taške $B_2(0{,}5, -4, 3{,}5)$.

6.6. Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu

Sakysime, kad taškas C dalija atkarpą AB santykiu λ, jeigu $AC : CB=\lambda$ $\left(182 \text{ paveiksle } \lambda=\frac{2}{3}\right)$. Akivaizdu, kad taškas C dalija atkarpą AB santykiu λ tada ir tik tada, kai

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}. \quad (1)$$

Kadangi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$, tai (1) lygybę galime užrašyti šitaip:

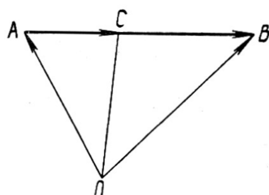
$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$$

arba

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}, \qquad (2)$$

kai $\lambda\neq-1$.

Sakykime, erdvėje duota stačiakampė Dekarto koordinačių sistema ir toje sistemoje atkarpos AB galų koordinatės: $A(x_A, y_A, z_A)$,



182 pav.

$B(x_B, y_B, z_B)$. Tada taško $C(x_C, y_C, z_C)$, dalijančio atkarpą AB santykiu λ, koordinates rasime iš (2) lygybės (lygių vektorių atitinkamos koordinatės yra lygios):

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}.} \qquad (3)$$

Jeigu atkarpa priklauso plokštumai, kurioje pasirinkta stačiakampė Dekarto koordinačių sistema, tai (3) formulės bus šitokios:

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}.} \qquad (4)$$

Kai $\lambda=1$, tada $AC=CB$ ir taškas C atkarpą AB dalija pusiau. Taigi atkarpos AB vidurio taško C koordinatės randamos naudojantis formulėmis

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+x_B}{2}, \quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}, \quad z_C=\frac{z_A+z_B}{2},} \qquad (5)$$

kai atkarpa yra erdvėje, ir

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+x_B}{2}, \quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2},} \qquad (6)$$

kai atkarpa yra plokštumoje.

Pavyzdžiai. 1. Taškas C atkarpą AB dalija santykiu $\lambda=\frac{2}{5}$. Ra-

sime taško C koordinates, kai atkarpos AB galų koordinatės yra $A(3, -1, 4)$, $B(-5, 0, 10)$.

Į (3) formules įrašę $x_A=3$, $y_A=-1$, $z_A=4$, $x_B=-5$, $y_B=0$, $z_B=10$, gauname

$$x_C=\frac{3+\frac{2}{5}\cdot(-5)}{1+\frac{2}{5}}=\frac{5}{7},\ y_C=\frac{-1+\frac{2}{5}\cdot 0}{1+\frac{2}{5}}=-\frac{5}{7},\ z_C=\frac{4+\frac{2}{5}\cdot 10}{1+\frac{2}{5}}=\frac{40}{7}.$$

Ats. $C\left(\frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{40}{7}\right)$.

2. Žinomos lygiagretainio $ABCD$ viršūnės A ir įstrižainių susikirtimo taško O koordinatės: $A(-3, -5)$, $O(3, -2)$. Rasime viršūnės D koordinates.

Kadangi lygiagretainio įstrižainės susikirtimo taške dalijasi pusiau, tai taškas O atkarpą AD dalija pusiau. Į (6) formules įrašę duotąsias reikšmes, gauname

$$3=\frac{-3+x_D}{2},\quad -2=\frac{-5+y_D}{2}.$$

Iš čia randame $x_D=9$, $y_D=1$.

3. Atkarpa, kurios galai $A(-5, -2)$ ir $B(4, 2{,}5)$, yra padalyta santykiu $3:4:2$ (pradedant nuo taško A). Rasime dalijimo taškų koordinates.

Sakykime, taškai C ir D atkarpą AB dalija duotuoju santykiu: $AC:CD:DB=3:4:2$. Taškas C atkarpą AB dalija santykiu

$$\lambda_1=\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4+2}=\frac{1}{2}.$$

Vadinasi,

$$x_C=\frac{-5+0{,}5\cdot 4}{1+0{,}5}=-2,\qquad y_C=\frac{-2+0{,}5\cdot 2{,}5}{1+0{,}5}=-0{,}5;\quad C(-2, -0{,}5).$$

Taškas D atkarpą AB dalija santykiu $\lambda_2=\frac{AD}{DB}=\frac{3+4}{2}=3{,}5$ ir

$$x_D=\frac{-5+3{,}5\cdot 4}{1+3{,}5}=2,\qquad y_D=\frac{-2+3{,}5\cdot 2{,}5}{1+3{,}5}=1{,}5;\qquad D(2, 1{,}5).$$

6.7. Trijų taškų priklausymo vienai tiesei sąlyga. Trijų vektorių komplanarumo sąlyga

Sprendžiant uždavinius bei įrodinėjant teoremas, dažnai kyla klausimas, ar trys duotieji taškai yra vienoje tiesėje.

Akivaizdu, kad trys taškai M_1, M_2, M_3 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai vektorius $\overrightarrow{M_1M_3}$ kolinearus vektoriui $\overrightarrow{M_1M_2}$ (183 pav.), t. y. kai egzistuoja toks skaičius λ, kad

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\lambda\overrightarrow{M_1M_2}. \qquad (1)$$



183 pav.

Jeigu žinomos taškų koordinatės: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, tai iš (1) lygybės išplaukia:

$$\begin{aligned} x_3-x_1&=\lambda(x_2-x_1), \\ y_3-y_1&=\lambda(y_2-y_1), \\ z_3-z_1&=\lambda(z_2-z_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

arba

$$\boxed{\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1},} \qquad (3)$$

jeigu $x_2-x_1\neq 0$, $y_2-y_1\neq 0$, $z_2-z_1\neq 0$.

Panašiai galima įrodyti, kad trys taškai $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ yra vienoje plokštumos tiesėje tada ir tik tada, kai galioja lygybės

$$\begin{aligned} x_3-x_1&=\lambda(x_2-x_1), \\ y_3-y_1&=\lambda(y_2-y_1) \end{aligned} \qquad (4)$$

arba

$$\boxed{\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1},} \qquad (5)$$

jeigu $x_2-x_1\neq 0$, $y_2-y_1\neq 0$.

(4) lygybes, naudojantis determinantu, galima užrašyti šitaip:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Tirsime trijų vektorių komplanarumą. Priminsime, kad trys vektoriai **a**, **b**, **c** komplanarūs tada ir tik tada, kai vienas iš jų yra kitų dviejų tiesinis darinys, t. y. kai egzistuoja tokie skaičiai α ir β, kartu nelygūs nuliui, kad

$$\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}. \qquad (7)$$

Jeigu žinomos vektorių koordinatės: $\mathbf{a}=(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{b}=(a_2, b_2, c_2)$ ir $\mathbf{c}=(a_3, b_3, c_3)$, tai (7) lygybę galima užrašyti šitaip:

$$\begin{aligned} a_3&=\alpha a_1+\beta a_2, \\ b_3&=\alpha b_1+\beta b_2, \\ c_3&=\alpha c_1+\beta c_2 \end{aligned} \qquad (8)$$

arba

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Pavyzdžiai. 1. Duoti taškų trejetai: a) $M_1(2, 1)$, $M_2(-1, 0)$, $M_3(5, 2)$; b) $N_1(0, 1)$, $N_2(0, 0)$, $N_3(3, 4)$; c) $P_1(3, 5)$, $P_2(3, -1)$, $P_3(3, 7)$. Nustatysime, kurie taškų trejetai yra vienoje tiesėje.

Remsimės (6) formule:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Taškai yra vienoje tiesėje.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3.$ Taškai nėra vienoje tiesėje.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Taškai yra vienoje tiesėje.

2. Ištirsime, ar taškai $M_1(3, 2, -1)$, $M_2(4, -3, 5)$ ir $M_3(0, -4, 1)$ priklauso vienai tiesei.

Remsimės (3) formule. $x_3-x_1=0-3=-3$, $x_2-x_1=4-3=1$, $y_3-y_1=-4-2=-6$, $y_2-y_1=-3-2=-5$. Kadangi

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=-3, \quad \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{6}{5},$$

tai duotieji taškai nepriklauso vienai tiesei.

3. Ištirsime, kurie vektorių trejetai yra komplanarūs: 1) $\mathbf{a}_1=(1, 4, 7)$, $\mathbf{a}_2=(2, 5, 8)$, $\mathbf{a}_3=(3, 6, 10)$; 2) $\mathbf{b}_1=(-4, 4, 4)$, $\mathbf{b}_2=(-1, 1, 5)$, $\mathbf{b}_3=(1, -1, 3)$; 3) $\mathbf{c}_1=(1, 0, -2)$, $\mathbf{c}_2=(0, 3, 2)$, $\mathbf{c}_3=(1, 1, 1)$.

Remsimės (9) formule.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3.$$

Vadinasi, vektoriai $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ir $\mathbf{a}_3$ yra nekomplanarūs.

$$2) \begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Taigi vektoriai $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ ir $\mathbf{b}_3$ komplanarūs.

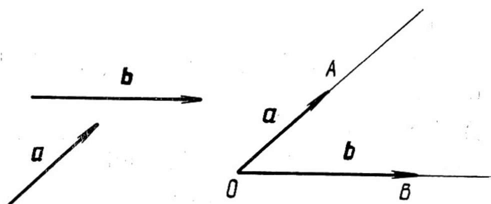
$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot1+0\cdot2\cdot1+0\cdot1\cdot(-2)-(-2)\cdot3\cdot1-$$

$$-1\cdot2\cdot1=7.$$

Vektoriai $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ nekomplanarūs.

6.8. Dviejų vektorių skaliarinė daugyba ir jos savybės

Sakykime, $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ — nenuliniai vektoriai. Iš bet kurio taško O nubrėžkime vektorius $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ (184 pav.). *Kampu tarp vektorių* **a** *ir* **b** *vadinamas kampas tarp spindulių OA ir OB.* Kampą tarp vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ žymėsime $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. Aišku, kad $0°\leqslant(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})\leqslant180°$ ir šio kampo didumas nepriklauso nuo taško O pasirinkimo. Jeigu $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$, tai $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=0°$. Jeigu $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$, tai $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=180°$. Jeigu $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=$ $=90°$, tai sakoma, kad *vektoriai* **a** *ir* **b** *yra statmeni* ir rašoma $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.



184 pav.

Susitarsime, kad kampas tarp dviejų vektorių, iš kurių vienas nulinis vektorius, yra 90°.

Dviejų vektorių skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus tų vektorių ilgių ir kampo tarp jų kosinuso sandaugai. Vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ skaliarinę sandaugą žymėsime $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Taigi pagal apibrėžimą

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).} \qquad (1)$$

Iš (1) lygybės išplaukia, kad dviejų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, kai bent vienas vektorius yra nulinis arba $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=90°$.

Dviejų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui tada ir tik tada, kai šie vektoriai yra statmeni.

Iš (1) formulės taip pat išplaukia, kad nenulinių vektorių skaliarinė sandauga yra teigiama (neigiama) tada ir tik tada, kai

$$0°<(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})<90° \quad (90°<(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})<180°).$$

Jeigu $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, tai

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2. \tag{2}$$

Skaliarinė sandauga $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ vadinama vektoriaus $\mathbf{a}$ skaliariniu kvadratu ir žymima $\mathbf{a}^2$. Taigi vektoriaus skaliarinis kvadratas lygus jo ilgio kvadratui.

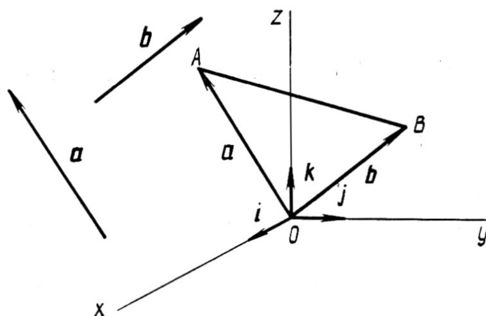
Atskiru atveju $\mathbf{i}^2=1$, $\mathbf{j}^2=1$, $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$.

1 teorema. *Dviejų vektorių* $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$ *ir* $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$ *skaliarinė sandauga lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sandaugų sumai, t. y.*

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.} \tag{3}$$

Įrodymas. Sakykime, kad vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ nelygūs nuliui ir nekolinearūs. Iš taško O brėžiame vektorius $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Gauname trikampį OAB (185 pav.). Kosinusų teoremą, nagrinėtą 2.5 skyrelyje, galime užrašyti šitaip:

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}). \tag{4}$$



185 pav.

Nesunku įsitikinti, kad (4) formulė teisinga ir tuo atveju, kai vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ yra kolinearūs arba bent vienas iš jų nulinis.

Kadangi $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$, tai iš (1) ir (4) lygybių išplaukia, kad

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

arba

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2). \tag{5}$$

Į (5) formulę įrašę vektorių $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ir $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ ilgių kvadratų reikšmes:

$$|\mathbf{a}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2, \quad |\mathbf{b}|^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2, \quad |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2=$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

ir atlikę veiksmus, gauname

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Teorema įrodyta.

Išvada. *Vektoriai* $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$ *ir* $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$ *statmeni tada ir tik tada, kai*

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \quad (6)$$

Jeigu žinome plokštumos vektorių **a** ir **b** koordinates, tai, panašiai kaip ir erdvėje, gauname

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2; \quad (7)$$

vektoriai **a** ir **b** statmeni tada ir tik tada, kai

$$x_1x_2+y_1y_2=0. \quad (8)$$

Kai $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, iš (1) formulės išplaukia, kad

$$\boxed{\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}.} \quad (9)$$

Į šią formulę įrašę skaliarinės sandaugos ir vektorių ilgių išraiškas koordinatėmis, gauname

$$\boxed{\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}} \quad (10)$$

— kampo tarp erdvės vektorių **a** ir **b** kosinuso koordinatinę išraišką;

$$\boxed{\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}} \quad (11)$$

— kampo tarp plokštumos vektorių **a** ir **b** kosinuso koordinatinę išraišką.

2 teorema. *Skaliarinė daugyba pasižymi savybėmis*:

1) $\mathbf{a}^2\geqslant 0$; *be to*, $\mathbf{a}^2>0$, *kai* $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$;
2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (perstatymo dėsnis);
3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ (skirstymo dėsnis);
4) $(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (jungimo dėsnis).

Įrodymas. Pirmoji savybė išplaukia iš (2) formulės, o antroji — iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo ir lygybės $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=\cos(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}})$. Įrodysime trečiąją ir ketvirtąją savybes imdami plokštumos vektorius.

Sakykime $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$ ir $\mathbf{c}=(x_3, y_3)$. Tada $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ ir $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3=(x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.

Kadangi $\alpha\mathbf{a}=(\alpha x_1, \alpha y_1)$, tai

$$(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=(\alpha x_1)x_2+(\alpha y_1)y_2=\alpha(x_1x_2+y_1y_2)=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Šios savybės panašiai įrodomos ir imant erdvės vektorius.

Pavyzdžiai. 1. Vektoriai **a** ir **b** sudaro 120° kampą, $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$. Apskaičiuosime skaliarinę sandaugą $(4\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})$.

Remdamiesi skaliarinės sandaugos apibrėžimu ir jos savybėmis, gauname:

$$(4\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})=8\mathbf{a}^2+10\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-3\mathbf{b}^2=8\mathbf{a}^2+10|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos 120^\circ-$$
$$-3\mathbf{b}^2=8\cdot4+10\cdot2\cdot3\left(-\frac{1}{2}\right)-3\cdot9=32-30-27=-25.$$

2. Apskaičiuosime lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių ilgius, kai $\overrightarrow{AB}=$ $=5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ ir $|\mathbf{a}|=2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}|=3$, $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=45^\circ$.

Randame lygiagretainio įstrižainių vektorius: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=6\mathbf{a}-$ $-\mathbf{b}$ ir $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=4\mathbf{a}+5\mathbf{b}$. Apskaičiuojame jų ilgius:

$$|\overrightarrow{AD}|^2=\overrightarrow{AD}^2=(6\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=36\mathbf{a}^2-12\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2=36\mathbf{a}^2-12|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos45^\circ+$$
$$+\mathbf{b}^2=36\cdot8-12\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+9=288-72+9=225,\ |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{225}=$$
$$=15;$$

$$\overrightarrow{CB}^2=(4\mathbf{a}+5\mathbf{b})^2=16\mathbf{a}^2+40\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+25\mathbf{b}^2=16\cdot8+40\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+$$
$$+25\cdot9=593,\ |\overrightarrow{CB}|=\sqrt{593}.$$

3. Nustatysime, su kokia m reikšme vektoriai $\mathbf{a}=(m, 7, -2)$ ir $\mathbf{b}=$ $=(-3, m, 2)$ yra statmeni.

Pagal (6) formulę tie vektoriai statmeni, kai

$$-3m+7m-4=0 \text{ arba } m=1.$$

4. Rasime kampą tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$; $A(3, 1)$, $B(1, 4)$, $C(1, 0)$ ir $D(4, 5)$.

Kadangi $\overrightarrow{AB}=(1-3, 4-1)=(-2, 3)$, $\overrightarrow{CD}=(3, 5)$, tai pasinaudoję (11) formule gauname

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{-2\cdot3+3\cdot5}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{9}{\sqrt{13}\sqrt{34}}=0{,}4282.$$

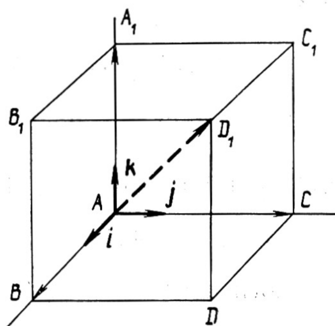
Lentelėse arba skaičiuotuvu randame $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})=64^\circ 39'$.

5. Apskaičiuosime kampo tarp kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos AB ir įstrižainės AD_1 kosinusą.

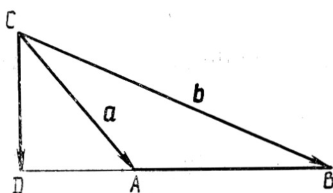
Koordinačių sistemą pasirenkame kaip parodyta 186 paveiksle. Tuomet $\overrightarrow{AB}=x\mathbf{i}=(x, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC}=x\mathbf{j}$, $\overrightarrow{AA_1}=x\mathbf{k}$, $\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=$ $=x\mathbf{i}+x\mathbf{j}+x\mathbf{k}=(x, x, x)$ ir

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{AB}})=\frac{x^2+x\cdot0+x\cdot0}{\sqrt{x^2+x^2+x^2}\cdot\sqrt{x^2}}=\frac{x^2}{x^2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

6. Trikampyje ABC: $|\overrightarrow{AC}|=1$, $|\overrightarrow{BC}|=2$, $\cos\widehat{ACB}=\frac{3}{4}$. Trikampio aukštinę $\overrightarrow{CD}$ išreikšime vektoriais $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ (187 pav.).



186 pav.



187 pav.

Vektoriai $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}-\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ yra kolinearūs. Todėl egzistuoja toks skaičius α, kad $\overrightarrow{CD}-\mathbf{a}=\alpha(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. Iš čia $\overrightarrow{CD}=\mathbf{a}+\alpha(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. Skaičių α rasime pareikalavę, kad vektorius $\overrightarrow{CD}$ būtų statmenas vektoriui $\overrightarrow{AB}$, t. y.

$$0=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=(\mathbf{a}+\alpha(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}^2+\alpha(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2.$$

Iš čia

$$\alpha=\frac{\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2}=\frac{\mathbf{a}^2-|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\widehat{ACB}}{\mathbf{a}^2-2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\widehat{ACB}+\mathbf{b}^2}=\frac{1-2\cdot\frac{3}{4}}{1-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{3}{4}+4}=-\frac{1}{4}.$$

Vadinasi,

$$\overrightarrow{CD}=\mathbf{a}-\frac{1}{4}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\frac{5}{4}\mathbf{a}-\frac{1}{4}\mathbf{b}.$$

6.9. Dviejų vektorių vektorinė daugyba

Vektorių **a** *ir* **b** *vektorine sandauga* vadinamas vektorius **c**, pasižymintis savybėmis:

1) $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ (vektoriaus **c** modulio skaitinė reikšmė lygi lygiagretainio, kurio kraštinės yra dauginamieji vektoriai, ploto skaitinei reikšmei (188 pav.);

2) vektorius **c** statmenas vektoriams **a** ir **b**;

3) vektoriai **a**, **b** ir **c** nurodyta tvarka sudaro dešinįjį trejetą (žiūrint iš vektoriaus **c** galo mažiausias posūkis nuo **a** iki **b** bus atliekamas prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį). Pažymėsime, kad vienetiniai vektoriai **i**, **j** ir **k** sudaro dešinįjį trejetą.

Dviejų vektorių **a** ir **b** vektorinę sandaugą žymėsime $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Teorema. *Vektorinė daugyba pasižymi savybėmis:*

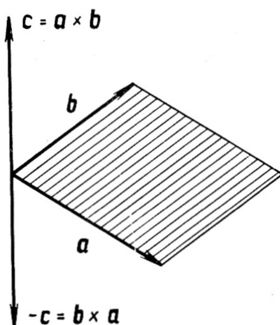
1) *vektorinė sandauga yra nulinis vektorius, jeigu vektoriai* **a** *ir* **b** *yra kolinearūs;*

2) *sukeitus dauginamuosius vietomis, vektorinės sandaugos kryptis tampa priešinga:*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a});$$

3) $(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (jungimo dėsnis);

4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (skirstymo dėsnis).



188 pav.

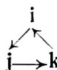
Įrodymas. 1) Iš vektorinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=0$, kai $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ arba $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, arba $\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=0$, t. y. $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=0^\circ$ arba $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=180^\circ$. Taigi visais atvejais vektoriai **a** ir **b** yra kolinearūs.

2) Vektoriai $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ir $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ yra vienodo ilgio. Jie statmeni dauginamųjų vektorių **a** ir **b** plokštumai. Kadangi vektoriai **a**, **b**, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ir **b**, **a**, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ sudaro dešiniuosius trejetus, tai vektoriai $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ir $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ turi būti priešingų krypčių. Vadinasi, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

3 ir 4 savybes laikysime teisingomis be įrodymo.

Remdamiesi vektorinės sandaugos apibrėžimu ir vektorinės sandaugos savybėmis, sudarome vienetinių vektorių **i**, **j** ir **k** vektorinės daugybos lentelę

	i	j	k
i	0	k	−j
j	−k	0	i
k	j	−i	0

Lentelę lengva atsiminti taikant schemą : jeigu du vektoriai dauginami vektoriškai rodyklės kryptimi, tai sandauga yra trečiasis vektorius, pavyzdžiui, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$; jeigu du vektoriai dauginami vektoriškai prieš rodyklę, tai sandauga — trečiasis vektorius su priešingu ženklu, pavyzdžiui, $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$.

Jeigu vektoriai **a** ir **b** išreikšti koordinatėmis: $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$, tai remdamiesi vektorinės sandaugos savybėmis ir vektorinės daugybos lentele, galime užrašyti:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\times(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})=x_1y_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+x_1z_2(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+$$
$$+y_1x_2(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+y_1z_2(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+z_1x_2(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+z_1y_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j})=x_1y_2\mathbf{k}-x_1z_2\mathbf{j}-$$
$$-y_1x_2\mathbf{k}+y_1z_2\mathbf{i}+z_1x_2\mathbf{j}-z_1y_2\mathbf{i}=(y_1z_2-z_1y_2)\mathbf{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\mathbf{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\mathbf{k}=$$
$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}. \quad (1)$$

Vektorinės sandaugos koordinatinę išraišką lengviau atsiminti pastebėjus, kad ji gaunama formaliai skleidžiant pagal pirmąją eilutę determinantą

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime vektorių $\mathbf{a}=(-1, 0, 1)$ ir $\mathbf{b}=(2, 1, 3)$ vektorinę sandaugą.

Remsimės (2) formule:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}=$$
$$=-\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}=(-1, 5, -1).$$

2. Apskaičiuosime plotą trikampio, kurio viršūnės yra $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$ ir $C(4, 4, 1)$.

Trikampio ABC plotas lygus pusei ploto lygiagretainio, kurio gretimų kraštinių vektoriai yra $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$. Taigi

$$Q_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

Kadangi $\overrightarrow{AB}=(1, 2, -2)$ ir $\overrightarrow{AC}=(5, 4, 2)$, tai

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{k}=$$
$$=12\mathbf{i}-12\mathbf{j}-6\mathbf{k} \text{ ir } |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{12^2+(-12)^2+(-6)^2}=18.$$

Vadinasi, $Q_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 18=9$.

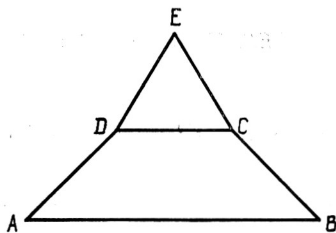
3. Rasime plotą lygiagretainio, kurio gretimų kraštinių vektoriai yra $\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ ir $\mathbf{m}-3\mathbf{n}$; $|\mathbf{m}|=5$, $|\mathbf{n}|=6$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}})=30°$.

Remiantis vektorinės sandaugos savybėmis,

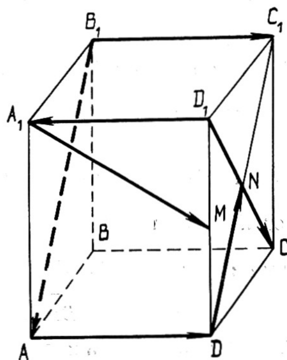
$$Q=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|(\mathbf{m}+2\mathbf{n})\times(\mathbf{m}-3\mathbf{n})|=|(\mathbf{m}\times\mathbf{m})+2(\mathbf{n}\times\mathbf{m})-3(\mathbf{m}\times\mathbf{n})-$$
$$-6(\mathbf{n}\times\mathbf{n})|=|2(\mathbf{n}\times\mathbf{m})+3(\mathbf{n}\times\mathbf{m})|=5|\mathbf{n}\times\mathbf{m}|=5|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{m}|\sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{m}})=$$
$$=5\cdot 6\cdot 5\cdot 0{,}5=75.$$

6.10. Pratimai

1. 189 paveiksle pavaizduota figūra, sudaryta iš lygiašonės trapecijos $ABCD$ ir lygiakraščio trikampio DCE. Tarp vektorių, kurių galai yra nurodytuose taškuose, raskite: 1) vienodo ilgio vektorius; 2) vienakrypčius vektorius; 3) priešingų krypčių vektorius; 4) lygius vektorius.



189 pav.



190 pav.

2. 190 paveiksle pavaizduotas stačiakampis gretasienis. Tarp nurodytų vektorių raskite: 1) vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{AD}$; 2) vektorių, priešingą vektoriui $\overrightarrow{AD}$; 3) vektorius, kolinearius vektoriui $\overrightarrow{AD}$; 4) vektorių, kolinearų vektoriui $\overrightarrow{B_1A}$; 5) vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{B_1A}$.

3. Duotas lygiagretainis $ABCD$ ir jo įstrižainių susikirtimo taškas O. 1) Raskite vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{AD}$. 2) Raskite vektorių, priešingą vektoriui $\overrightarrow{BO}$. 3) Iš taško D nubrėžkite vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{AB}$. 4) Iš taško D nubrėžkite vektorių, priešingą vektoriui $\overrightarrow{BC}$.

4. Duotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Nubrėžkite: 1) iš taško A vektorių $\overrightarrow{D_1C_1}$; 2) iš taško B_1 vektorių $\overrightarrow{C_1D}$; 3) iš taško A_1 vektorių $\overrightarrow{AC}$; 4) iš taško D vektorių, priešingą vektoriui $\overrightarrow{A_1D_1}$.

5. Ar teisingi teiginiai: 1) du priešingų krypčių vektoriai yra kolinearūs; 2) du kolinearūs vektoriai yra vienakrypčiai; 3) du lygūs vektoriai yra vienakrypčiai; 4) du vienakrypčiai vektoriai yra lygūs; 5) du vektoriai yra lygūs, jeigu jų ilgiai yra lygūs.

6. Duotas kvadratas $ABCD$ ir kraštinės BC vidurio taškas E. Raskite sumas: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$; 3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$; 4) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

7. Duotas lygiagretainis $ABCD$, jo įstrižainių susikirtimo taškas O, kraštinių BC ir AD vidurio taškai F ir H. Raskite: 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$; 4) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{BA}$; 5) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{HA}$.

8. Duotas tetraedras $ABCD$. Raskite: 1) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$; 4) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA}$; 5) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

9. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite: 1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C_1C}$; 4) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}$.

10. Duotas nenulinis vektorius **a**. Nubrėžkite vektorius: 1) $4\mathbf{a}$; 2) $\frac{3}{4}\mathbf{a}$; 3) $-3\mathbf{a}$; 4) $2{,}5\mathbf{a}$; 5) $-1{,}5\mathbf{a}$.

11. Duoti du nenuliniai vektoriai **a** ir **b**. Nubrėžkite: 1) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; 2) $3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$; 3) $-\mathbf{a}+5\mathbf{b}$; 4) $0{,}5\mathbf{a}+1{,}5\mathbf{b}$; 5) $-\frac{4}{5}\mathbf{a}-\frac{3}{5}\mathbf{b}$.

12. Duotas taisyklingasis šešiakampis $ABCDEF$. Vektorius $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{AF}=\mathbf{b}$.

13. Lygiagretainyje $ABCD$ taškas M yra kraštinės CD vidurys. Vektorius $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{AM}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{BM}$ ir $\overrightarrow{MC}$.

14. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ centras yra taškas O, M — kraštinės DE vidurio taškas. Vektorių $\overrightarrow{AM}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{OD}$ ir $\overrightarrow{OE}$.

15. Rombo $ABCD$ kraštinių vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{DA}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}$.

16. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ vektorius $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AE}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$.

17. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ vektorius $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ ir $\overrightarrow{EF}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}=\mathbf{m}$, $\overrightarrow{AE}=\mathbf{n}$.

18. E ir F yra trikampio ABC kraštinių AB ir BC vidurio taškai. Įrodykite, kad $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{EF}$.

19. Duotas lygiagretainis $ABCD$ ir bet koks taškas M. Įrodykite, kad $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

20. M ir N — trapecijos $ABCD$ šoninių kraštinių AD ir BC vidurio taškai. Įrodykite, kad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

21. Taškai M_1 ir M_2 yra atitinkamai atkarpų A_1B_1 ir A_2B_2 vidurio taškai. Įrodykite, kad $\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2})$.

22. Duotas trikampis ABC ir vektoriai $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$. Įrodykite, kad: 1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$; 2) iš trikampio ABC pusiaukraštinių galima sudaryti trikampį.

23. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške M. Raskite tokį skaičių α, kad būtų: 1) $\overrightarrow{AB_1}=\alpha\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BA_1}=\alpha\overrightarrow{A_1C}$; 3) $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AA_1}$; 4) $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{MA_1}$; 5) $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{B_1A}$.

24. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės kertasi taške O. Raskite skaičių α, kai: 1) $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{C_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{DO}=\alpha\overrightarrow{DB_1}$; 3) $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{D_1C_1}$; 4) $\overrightarrow{AC_1}=\alpha\overrightarrow{AO}$; 5) $\overrightarrow{DB_1}=$ $=\alpha\overrightarrow{B_1O}$.

25. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Nurodykite, kurie vektorių trejetai yra komplanarūs: 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{B_1D_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{A_1D}$; 3) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$; 4) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{B_1C}$; 5) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ ir $\overrightarrow{BC_1}$.

26. Įrodykite, kad vektoriai **a**, **b** ir **c** yra komplanarūs, jeigu: 1) du vektoriai iš jų yra kolinearūs; 2) vienas vektorius yra nulinis; 3) $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, kai α ir β — realieji skaičiai.

27. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}$ šiuos vektorius: 1) $\overrightarrow{AB_1}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}$; 3) $\overrightarrow{DB_1}$; 4) $\overrightarrow{AM}$, kai M — briaunos CC_1 vidurio taškas; 5) $\overrightarrow{DM}$.

28. Duotas tetraedras $ABCD$ ir taškas M — briaunos BC vidurys. Išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$ ir $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$ šiuos vektorius: 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{DB}$; 4) $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{DM}$.

29. Šalia lygiagretainio $ABCD$ plokštumos paimtas taškas O. Išreikškite vektoriais $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ ir $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ šiuos vektorius: 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{OD}$; 4) $\overrightarrow{OM}$, kai M — lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas; 5) $\overrightarrow{OK}$, kai K — briaunos AD vidurio taškas.

30. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N ir P — briaunų DD_1, CC_1 ir atkarpos BC_1 vidurio taškai. Vektoriais $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AD}$ ir $\mathbf{c}=\overrightarrow{AA_1}$ išreikškite vektorius: 1) $\overrightarrow{AM}$; 2) $\overrightarrow{AP}$; 3) $\overrightarrow{PN}$; 4) $\overrightarrow{PM}$; 5) $\overrightarrow{MN}$.

31. Raskite vektoriaus ilgį: 1) $\mathbf{a}=(-3,\ 4)$; 2) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-9\mathbf{j}$; 3) $\mathbf{a}=(-1,\ 5,\ -7)$; 4) $\mathbf{a}=-4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$; 5) $\mathbf{a}=5\mathbf{i}-12\mathbf{k}$.

32. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates ir ilgį, kai: 1) $A(-3,\ 2)$, $B(4,\ 1)$; 2) $A\ (0,\ -3)$, $B\ (1,\ -5)$; 3) $A\ (1,\ 1,\ 0)$, $B\ (1,\ 1,\ -2)$; 4) $A\ (-1,\ 1,\ 0)$, $B\ (3,\ 4,\ -\sqrt{11})$; 5) $A\ (-\sqrt{2},\ 0,\ -5)$, $B\ (0,\sqrt{5},\ -2)$.

33. Duoti vektoriai $\mathbf{a}=(2,\ -1)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 4)$ ir $\mathbf{c}=(0,\ -2)$. Raskite koordinates vektorių: 1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; 3) $\mathbf{b}-\mathbf{c}$; 4) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$; 5) $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

34. Duoti vektoriai $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(0,\ 5,\ -1)$ ir $\mathbf{c}=(0{,}5,\ 0,\ 3)$. Raskite: 1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a}+\mathbf{c}$; 3) $\mathbf{b}-\mathbf{c}$; 4) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$; 5) $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

35. Duoti vektoriai $\mathbf{a}=(-1,\ 0,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-4,\ 2,\ 0)$ ir $\mathbf{c}=(1,\ -1,\ 3)$. Raskite: 1) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c}$; 2) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$; 3) $3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$; 4) $-2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+\mathbf{c}$; 5) $-4\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$.

36. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$, lygaus vektoriui **a**, pabaigos B koordinates, kai: 1) $\mathbf{a}=(3,\ -2)$, $A\ (0,\ 5)$; 2) $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $A\ (2,\ -3)$; 3) $\mathbf{a}=(-1,\ 1,\ 3)$, $A\ (2,\ 0,\ -5)$; 4) $\mathbf{a}=(0,\ 2,\ -1)$, $A\ (3,\ 0,\ -1)$; 5) $\mathbf{a}=-3\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $A\ (0,\ 2,\ -1)$.

37. Ar kolinearūs vektoriai: 1) $\mathbf{a}=(2,\ 3)$ ir $\mathbf{b}=(-4,\ -6)$; 2) $\mathbf{a}=(1,\ 3)$ ir $\mathbf{b}=(2,\ 9)$; 3) $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=(2,\ 2,\ -8)$; 4) $\mathbf{a}=(-5,\ 6)$ ir $\overrightarrow{AB}$, kai $A\ (-11,\ 7)$, $B(-21,\ 19)$; 5) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, kai $A(-2,\ 3,\ 1)$, $B(1,\ 5,\ -2)$, $C(4,\ 5,\ -8)$ ir $D(1,\ 3,\ -5)$?

38. Įrodykite, kad taškai A, B, C ir D yra lygiagretainio viršūnės: 1) $A(1,\ 3)$, $B(4,\ 7)$, $C(2,\ 8)$, $D(-1,\ 4)$; 2) $A(1,\ 0)$, $B(3,\ 4)$, $C(2,\ -1)$, $D(2,\ 5)$; 3) $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 1)$, $C(-1,\ 3)$, $D(-2,\ 5)$; 4) $A(2,\ 4,\ -4)$, $B(1,\ 1,\ -3)$, $C(-2,\ 0,\ 5)$, $D(-1,

3, 4); 5) $A(2, 0, -4)$, $B(7, -15, 16)$, $C(-1, -1, 11)$, $D(-4, 8, -1)$. Raskite lygiagretainių įstrižainių ilgius.

39. Su kuriomis α reikšmėmis vektoriai **a** ir **b** yra kolinearūs: 1) $\mathbf{a}=(\alpha, 4)$ ir $\mathbf{b}=(9, \alpha)$; 2) $\mathbf{a}=2\alpha\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=(1, 8\alpha)$; 3) $\mathbf{a}=(1, 3, \alpha)$ ir $\mathbf{b}=(2, \alpha, 12)$; 4) $\mathbf{a}=(-2, \alpha, 3\alpha)$ ir $\mathbf{b}=(\alpha, -1{,}5, -4{,}5)$; 5) $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=(4, 2, -2\alpha)$.

40. Duoti vektoriai $\mathbf{a}=(-1, 2)$ ir $\mathbf{b}=(3, 4)$. Su kuriomis α reikšmėmis vektoriai **d** ir **e** yra kolinearūs: 1) $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ ir $\mathbf{e}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}-\mathbf{b}$ ir $\mathbf{e}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 3) $\mathbf{d}=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ ir $\mathbf{e}=\alpha\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 4) $\mathbf{d}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ir $\mathbf{e}=3\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$; 5) $\mathbf{d}=2\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ ir $\mathbf{e}=-\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}$.

41. Su kuriomis α ir β reikšmėmis vektoriai **a** ir **b** yra kolinearūs: 1) $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\alpha\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=\beta\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+5\mathbf{k}$; 3) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=\beta\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; 4) $\mathbf{a}=(\alpha, -2, 5)$ ir $\mathbf{b}=(1, \beta, -4)$; 5) $\mathbf{a}=(-2, 1, \alpha)$ ir $\mathbf{b}=(\beta, 4, 3)$.

42. Įrodykite, kad taškai *A, B, C* ir *D* yra trapecijos viršūnės: 1) $A(2, 3)$, $B(7, 5)$, $C(10, 2)$, $D(0, -2)$; 2) $A(1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(4, 0)$, $D(8, -3)$; 3) $A(1, 2)$ $B(8, 2)$, $C(7, 5)$, $D(3, 5)$; 4) $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, 3)$, $D(3, -5, 3)$; 5) $A(10, 2, 3)$, $B(0, -2, 5)$, $C(2, 3, 1)$, $D(7, 5, 0)$.

43. Raskite koordinates vienetinio vektoriaus **b**: 1) vienakrypčio vektoriui $\mathbf{a}=(2, -3, 6)$; 2) priešingos krypties vektoriui $\mathbf{a}=(3, 0, -4)$; 3) kolinearaus vektoriui $\mathbf{a}=(0, 0, -4)$; 4) kolinearaus vektoriui $\mathbf{a}=(1, -2, \sqrt{11})$; 5) priešingos krypties vektoriui $\overrightarrow{AB}$, kai: $A(0, -\sqrt{20}, 3)$, $B(\sqrt{5}, 0, -9)$.

44. Raskite atkarpos *AB* vidurio koordinates, kai: 1) $A(-2, 4)$, $B(6, 9)$; 2) $A(-3, 5)$, $B(7, -9)$; 3) $A(-1, 0, 5)$, $B(3, -2, 1)$; 4) $A(2, 3, 0)$, $B(-4, 1, 3)$; 5) $A(-2, 3, 1)$, $B(0, 4, -5)$.

45. Duota atkarpos *AB* galo *A* ir vidurio taško *C* koordinatės. Raskite taško *B* koordinates, kai: 1) $A(-2, -5)$, $C(0, 3)$; 2) $A(0, -1)$, $C(4, -2)$; 3) $A(3, 1)$, $C(-1, 1)$; 4) $A(2, 0, 1)$, $C(-1, 2, 5)$; 5) $A(-1, 2, 3)$, $C(0, -1, 1)$.

46. Atkarpą *AB* taškas *C* dalija santykiu λ. Raskite taško *C* koordinates, kai: 1) $A(1, -2)$, $B(-3, 4)$, $\lambda=\frac{4}{3}$; 2) $A(-3, 1)$, $B(2, 5)$, $\lambda=\frac{1}{3}$; 3) $A(6, 4)$, $B(1, 7)$, $\lambda=\frac{3}{2}$; 4) $A(7, 2, -3)$, $B(-5, 0, 4)$, $\lambda=\frac{1}{5}$; 5) $A(6, -4, -10)$, $B(14, 12, -2)$, $\lambda=\frac{1}{3}$.

47. Atkarpa, kurios galai *A* ir *B*, padalyta santykiu $\alpha:\beta:\gamma$. Raskite dalijimo taškų koordinates, kai: 1) $A(2, -3)$, $B(4, 5)$, $\alpha:\beta:\gamma=2:3:5$; 2) $A(-7, -4)$, $B(5, 3)$, $\alpha:\beta:\gamma=3:4:2$; 3) $A(4, 0)$, $B(3, -2)$, $\alpha:\beta:\gamma=1:1:1$; 4) $A(-1, 2, 3)$, $B(5, 6, -9)$, $\alpha:\beta:\gamma=2:1:3$; 5) $A(0, 3, -2)$, $B(6, -5, 4)$, $\alpha:\beta:\gamma=1:2:2$.

48. Atkarpa *AB* padalyta į 5 lygias dalis. Raskite dalijimo taškų koordinates, kai $A(-7, -2)$, $B(13, 3)$.

49. Atkarpą *AB* taškai $C(2, 2, -3)$ ir $D(-1, 4, 6)$ dalija į 3 lygias dalis. Raskite atkarpos *AB* galų koordinates.

50. Atkarpa *AB*, kurios galų koordinatės $A(-8, 0, -3)$ ir $B(2, -10, 3)$, padalyta į 4 lygias dalis. Raskite dalijimo taškų koordinates.

51. Kurie taškų trejetai yra vienoje tiesėje: 1) $A(1, -2)$, $B(1, -1)$, $C(0, 0)$; 2) $A(-1, 1)$, $B(0, 1)$, $C(5, 1)$; 3) $A(3, 2)$, $B(1, -1)$, $C(0, 3)$; 4) $A(-4, 8, -2)$, $B(-3, -1, 7)$, $C(-2, -10, -16)$; 5) $A(-5, 7, 12)$, $B(4, -8, 3)$, $C(13, -23, -6)$.

52. Ar komplanarūs vektoriai: 1) $\mathbf{a}=(-3, -3, 0)$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}$, $\mathbf{c}=\mathbf{j}$; 2) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-5\mathbf{k}$; $\mathbf{b}=\mathbf{i}$, $\mathbf{c}=\mathbf{k}$; 3) $\mathbf{a}=(1, -2, 2)$, $\mathbf{b}=(-2, 0, 1)$, $\mathbf{c}=(5, -1, 0)$; 4) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$; 5) $\mathbf{a}=(0, 5, 3)$, $\mathbf{b}=(2, 2, 2)$, $\mathbf{c}=(1, 0, 4)$.

53. Apskaičiuokite vektorių **a** ir **b** skaliarinę sandaugą, kai: 1) $|\mathbf{a}|=8$, $|\mathbf{b}|=5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=60°$; 2) $|\mathbf{a}|=8$, $|\mathbf{b}|=5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=0°$; 3) $|\mathbf{a}|=8$, $|\mathbf{b}|=5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=90°$; 4) $|\mathbf{a}|=8$, $|\mathbf{b}|=5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=120°$; 5) $|\mathbf{a}|=8$, $|\mathbf{b}|=5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=180°$.

54. Vektoriai **a** ir **b** sudaro 120° kampą, $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=2$. Apskaičiuokite: 1) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$; 2) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$; 3) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$; 4) $|2\mathbf{a}-3\mathbf{b}|$; 5) $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot(4\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

55. Vektoriai **a** ir **b** sudaro 150° kampą, $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{3}$. Apskaičiuokite: 1) $|\mathbf{a}-2\mathbf{b}|$; 2) $|2\mathbf{a}+\mathbf{b}|$; 3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot 2\mathbf{a}$; 4) $(3\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$; 5) $(\mathbf{a}-3\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

56. Vektoriai **a** ir **b** sudaro 60° kampą, $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=5$. Apskaičiuokite: 1) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$; 2) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$; 3) $(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-2\mathbf{b})$; 4) $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$; 5) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot 4\mathbf{a}$.

57. Imant vektorius $5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ ir $\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ kraštinėmis nubrėžtas lygiagretainis. Raskite lygiagretainio įstrižainių ilgius, kai $|\mathbf{a}|=2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}|=3$ ir $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=45°$.

58. Raskite lygiagretainio, kurio gretimų kraštinių vektoriai yra $\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ ir $3\mathbf{m}-\mathbf{n}$, įstrižainių ilgius, kai $|\mathbf{m}|=|\mathbf{n}|=1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}})=60°$.

59. Su kokia α reikšme vektoriai $\mathbf{p}=\alpha\mathbf{a}+17\mathbf{b}$ ir $\mathbf{q}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ yra statmeni, kai $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=120°$.

60. Kokį kampą sudaro vienetiniai vektoriai **m** ir **n**, jeigu vektoriai $\mathbf{a}=\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ ir $\mathbf{b}=5\mathbf{m}-4\mathbf{n}$ yra statmeni?

61. Dvi jėgos $\mathbf{F}_1$ ir $\mathbf{F}_2$ veikia vieną tašką. Raskite tų jėgų atstojamąją, kai $|\mathbf{F}_1|=7$ N, $|\mathbf{F}_2|=4$ N ir $(\widehat{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2})=120°$.

62. Raskite trijų jėgų, kurių kiekviena lygi 10 N, atstojamąją, kai tos jėgos veikia vieną tašką ir kampai tarp jų lygūs 90°, 60°, 60°.

63. Raskite trijų jėgų, kurių kiekviena lygi 12 N, atstojamosios didumą, kai tos jėgos veikia vieną tašką ir kampai tarp jų lygūs 60°.

64. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ kraštinė lygi 2, o jo centras — taškas O. Apskaičiuokite skaliarines sandaugas: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$; 4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$; 5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

65. Duotas trikampis ABC ir jo kraštinių BC, AC, AB vidurio taškai D, E ir F. Apskaičiuokite $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$.

66. Duotas lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi 1. Apskaičiuokite $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

67. Stačiojo trikampio ACB įžambinė AB lygi c. Apskaičiuokite sumą $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

68. Kiekvienos tetraedro $ABCD$ briaunos ilgis lygus a. M, N ir P — briaunų AB, AD, DC vidurio taškai. Apskaičiuokite skaliarines sandaugas: 1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$; 3) $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}$; 5) $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{BA}$.

69. Raskite vektorių **a** ir **b** skaliarines sandaugas, kai: 1) $\mathbf{a}=(2, 3)$, $\mathbf{b}=(4, -2)$; 2) $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$; 3) $\mathbf{a}=(2, 0, -3)$, $\mathbf{b}=(4, -1, 2)$; 4) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$; 5) $\mathbf{a}=3\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$.

70. Raskite vektorių **a** ir **b** skaliarinę sandaugą, kai: 1) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(2, -3)$, $C(4, 0)$; 2) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{13}$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=60°$; 3) $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(1, 0, -2)$, $C(3, 4, 1)$; 4) $|\mathbf{a}|=2\sqrt{2}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-4\mathbf{k}$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=45°$; 5) $\mathbf{a}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(4, -2, 0)$, $B(1, -1, 3)$, $C(0, 2, -4)$.

71. Raskite kampą tarp vektorių **a** ir **b**, kai: 1) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}$; 2) $\mathbf{a}=(-2, 3)$, $\mathbf{b}=(3, 1)$; 3) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=(-4, 1, 1)$; 4) $\mathbf{a}=(1, -3, 1)$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(-5, 7, -8)$, $C(-7, 9, -9)$; 5) $\mathbf{a}=(-2, 4, 5)$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(3, -5, 1)$, $C(4, 4, 4)$.

72. Ar statmeni vektoriai: 1) $\mathbf{a}=(-2, 4)$ ir $\mathbf{b}=(6, 3)$; 2) $\mathbf{a}=(2, 3)$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(2, -1)$, $C(0, 4)$; 3) $\mathbf{a}=(2, 3, -5)$, $\mathbf{b}=(-1, 4, 2)$; 4) $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$; 5) $\mathbf{a}=(-3, 2, 5)$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(0, 1, 2)$, $C(6, -2, 3)$.

73. Su kokia α reikšme vektoriai **a** ir **b** yra statmeni: 1) $\mathbf{a}=(3, 5)$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(\alpha, 1)$, $C(3, 6)$; 2) $\mathbf{a}=(6, 0, 12)$ ir $\mathbf{b}=(-8, 13, \alpha)$; 3) $\mathbf{a}=(\alpha, 7, -2)$ ir $\mathbf{b}=(-3, \alpha, 2)$; 4) $\mathbf{a}=(-1, 2, -\alpha)$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(0, 4, 1)$, $C(\alpha, 7, -3)$; 5) $\mathbf{a}=(\alpha, 3, 4)$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(0, -3, 2)$, $C(5, 3, 5)$.

74. Nustatykite trikampio rūšį (bukasis, smailusis, statusis), kai: 1) $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(2{,}5, 2{,}5)$; 2) $A(1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(8, 3)$; 3) $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$; $C(2, 5)$; 4) $A(2, 4, 5)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(-1, 0, 3)$; 5) $A(1, -1, 3)$, $B(3, -1, 1)$, $C(-1, 1, 3)$.

75. Lygiagretainio $ABCD$ priešingos viršūnės yra $A(-3, -2, 0)$ ir $C(5, 0, 2)$, $B(3, -3, 1)$ ir D. Raskite kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

76. Trikampyje ABC $\overrightarrow{AB}=(-8{,}5, 3, 0)$ ir $\overrightarrow{AM}=(-8, 4, 1)$, M — kraštinės BC vidurio taškas. Raskite kraštinės BC ilgį ir kampo tarp $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{BC}$ kosinusą.

77. Duotos trikampio viršūnės $A(3, -2, 1)$, $B(3, 0, 2)$ ir $C(1, 2, 5)$. Raskite kampo tarp pusiaukraštinės BD ir kraštinės AC kosinusą.

78. Trikampyje ABC $\overrightarrow{AB}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ ir $\overrightarrow{AC}=8\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$. Raskite pusiaukraštinės AM ilgį ir kampo tarp $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AB}$ kosinusą.

79. Raskite kosinusus kampų, kuriuos duotieji vektoriai sudaro su koordinačių ašimis: 1) $\mathbf{a}=(2, 2)$; 2) $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1, -2)$, $B(3, -1)$; 3) $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$; 4) $\mathbf{a}=(4, 0, -1)$; 5) $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$.

80. Duoti du vektoriai $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$. Raskite vektorių **c**, kai $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=1$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=7$.

81. Duoti du vektoriai $\mathbf{a}=(3, -1, 5)$ ir $\mathbf{b}=(1, 2, -3)$. Raskite vektoriaus **c**, statmeno ašiai Oz, koordinates, kai $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=9$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=-4$.

82. Raskite vektoriaus **c**, kolinearaus vektoriui $\mathbf{a}=(2, 1)$, koordinates, kai $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=10$.

83. Duoti du vektoriai $\mathbf{a}=(3, -2, 3)$ ir $\mathbf{b}=(1, 2, 1)$. Raskite vektoriaus **c**, kolinearaus vektoriui **b**, koordinates, kai $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=12$.

84. Vektorius **a** kolinearus vektoriui $\mathbf{b}=(12, -16, -15)$, su ašimi Oz sudaro smailųjį kampą ir $|\mathbf{a}|=100$. Raskite vektoriaus **a** koordinates.

85. Vektorius **c** kolinearus vektoriui $\mathbf{b}=(2\sqrt{2}, -1, 4)$, su ašimi Oy sudaro bukąjį kampą ir $|\mathbf{c}|=10$. Raskite vektoriaus **c** koordinates.

86. Duoti trys vektoriai $\mathbf{a}=(2, -1, 3)$, $\mathbf{b}=(3, 2, 1)$ ir $\mathbf{c}=(-2, -3, 4)$. Raskite vektoriaus **d** koordinates, kai $\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}=-3$, $\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}=-1$, $\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}=2$.

87. Vektorius **c** statmenas vektoriams $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=18\mathbf{i}-22\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, su ašimi Oy sudaro bukąjį kampą ir $|\mathbf{c}|=14$. Raskite vektoriaus **c** koordinates.

88. Vektorius **c** statmenas vektoriams $\mathbf{a}=\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, su ašimi Oz sudaro bukąjį kampą ir $|\mathbf{c}|=\sqrt{13}$. Raskite vektoriaus **c** koordinates.

89. Vektoriai **c**, $\mathbf{a}=(-1, 1, 1)$ ir $\mathbf{b}=(2, 0, 1)$ yra komplanarūs. Vektorius **c** statmenas vektoriui **b** ir $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=7$. Raskite vektoriaus **c** koordinates.

90. Remdamiesi vektoriais, įrodykite: 1) rombo įstrižainės yra statmenos; 2) stačiakampio įstrižainės yra lygios; 3) lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi jo kraštinių ilgių kvadratų sumai; 4) trikampio aukštinės kertasi viename taške; 5) trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai minus dviguba sandauga tų kraštinių ir tarp jų esančio kampo kosinuso (**kosinusų teorema**).

91. Raskite lygiašonio trikampio viršūnės kampą, jeigu jo pusiaukraštinės į šonines kraštines yra statmenos.

92. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite kampą tarp vektorių: 1) $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$; 3) $\overrightarrow{AD_1}$ ir $\overrightarrow{BA_1}$; 4) $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{DC_1}$; 5) $\overrightarrow{CB_1}$ ir $\overrightarrow{AA_1}$.

93. Duota $|\mathbf{a}|=7\sqrt{3}$, $|\mathbf{b}|=8$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}=60°$. Raskite $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.
94. Duota $|\mathbf{a}|=8$, $|\mathbf{b}|=5$ ir $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=24$. Apskaičiuokite $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.
95. Duota $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=13$ ir $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=24$. Apskaičiuokite $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$.
96. Vektoriai **a** ir **b** yra statmeni. Kai $|\mathbf{a}|=5$ ir $|\mathbf{b}|=3$, apskaičiuokite: 1) $|(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})|$; 2) $|(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})|$.

97. Duota $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=4$ ir $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}=120°$. Apskaičiuokite: 1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2$; 2) $((\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}))^2$; 3) $(\mathbf{a}\times(4\mathbf{a}-3\mathbf{b}))^2$.
98. Apskaičiuokite vektorių **a** ir **b** vektorinę sandaugą, kai: 1) $\mathbf{a}=(2, 3, -1)$ ir $\mathbf{b}=(0, 1, 3)$; 2) $\mathbf{a}=(3, 0, -2)$ ir $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $A(4, 3, -1)$, $C(5, 6, -2)$.
99. Raskite $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{b}$, kai $\mathbf{a}=(3, -1, -2)$ ir $\mathbf{b}=(1, 2, -1)$.
100. Raskite $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$, kai $\mathbf{a}=(3, -1, -2)$ ir $\mathbf{b}=(1, 2, -1)$.
101. Raskite plotą lygiagretainio, kurio kraštinės vektoriai $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}$.
102. Duotos trikampio viršūnės $A(2, -1, 3)$, $B(4, 0, 1)$, $C(-10, 5, 3)$. Raskite trikampio plotą.

103. Raskite lygiagretainio $ABCD$ aukštinės DE ilgį, kai $\overrightarrow{AB}=(8, 4, 1)$ ir $\overrightarrow{AD}=(2, -2, 1)$.

104. Raskite trikampio ABC aukštinės CD ilgį, kai $\overrightarrow{AB}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ ir $\overrightarrow{BC}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}$.

105. Raskite trikampio ABC aukštinės BD ilgį, kai $\overrightarrow{AB}=(2, 1, -2)$ ir $\overrightarrow{BC}=(3, 2, 6)$.

6.11. Atsakymai

1. 1) $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{EC}|$; 2) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$; 4) nėra. **2.** 1) $\overrightarrow{B_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{D_1A_1}$; 3) $\overrightarrow{D_1A_1}$ ir $\overrightarrow{B_1C_1}$; 4) $\overrightarrow{DM}$; 5) nėra. **3.** 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{DO}$; 3) $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{DA}$. **4.** 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{B_1A}$; 3) $\overrightarrow{A_1C_1}$; 4) $\overrightarrow{DA}$. **5.** 1) taip; 2) ne; 3) taip; 4) ne; 5) ne. **6.** 1) $\overrightarrow{AE}$; 2) $\overrightarrow{DB}$; 3) $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{EA}$; 5) **0**. **7.** 1) $\overrightarrow{DB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{BH}$; 5) $\overrightarrow{BO}$. **8.** 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) **0**; 4) $\overrightarrow{BC}$; 5) **0**. **9.** 1) $\overrightarrow{CB_1}$; 2) $\overrightarrow{AD_1}$; 3) $\overrightarrow{D_1B}$; 4) $\overrightarrow{B_1D_1}$; 5) **0**. **12.** 1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. **13.** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MC}$. **14.** $1{,}5\overrightarrow{OD}+0{,}5\overrightarrow{OE}$. **15.** $\overrightarrow{AB}=+0{,}5\mathbf{a}-0{,}5\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC}=0{,}5\mathbf{a}+0{,}5\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=0{,}5\mathbf{b}-0{,}5\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DA}=-0{,}5\mathbf{a}-0{,}5\mathbf{b}$. **16.** $\overrightarrow{AD}=2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DE}=-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{EF}=-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{FA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE}=2\mathbf{b}-\mathbf{a}$. **17.** $\overrightarrow{AD}=\mathbf{m}+\mathbf{n}$, $\overrightarrow{AC}=1{,}5\mathbf{m}+0{,}5\mathbf{n}$, $\overrightarrow{AF}=0{,}5\mathbf{n}-0{,}5\mathbf{m}$, $\overrightarrow{EF}=-0{,}5\mathbf{m}-0{,}5\mathbf{n}$. **23.** 1) 0,5; 2) 1; $\frac{2}{3}$; 4) 2; 5) -2. **24.** 1) -1; 2) 0,5; 3) 1; 4) 2; 5) -2. **25.** 1), 4), 5).

27. 1) $\mathbf{a}+\mathbf{c}$; 2) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$; 3) $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$; 4) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+0{,}5\mathbf{c}$; 5) $\mathbf{a}+0{,}5\mathbf{c}$. **28.** 1) $\mathbf{c}-\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{d}-\mathbf{c}$; 3) $\mathbf{b}-\mathbf{d}$; 4) $0{,}5\mathbf{b}+0{,}5\mathbf{c}$; 5) $0{,}5\mathbf{b}+0{,}5\mathbf{c}-\mathbf{d}$. **29.** 1) $\mathbf{c}-\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{c}-\mathbf{a}$; 3) $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$;

4) $0,5\mathbf{a}+0,5\mathbf{c}$; 5) $\mathbf{a}-0,5\mathbf{b}+0,5\mathbf{c}$. **30.** 1) $\mathbf{b}+0,5\mathbf{c}$; 2) $\mathbf{a}+0,5\mathbf{b}+0,5\mathbf{c}$; 3) $0,5\mathbf{b}$; 4) $0,5\mathbf{b}-\mathbf{a}$; 5) $\mathbf{a}$. **31.** 1) 5; 2) $\sqrt{85}$; 3) $\sqrt{75}$; 4) $\sqrt{50}$; 5) 13. **32.** 1) $(7, -1)$, $\sqrt{50}$; 2) $(1, -2)$, $\sqrt{5}$; 3) $(0, 0, -2)$, 2; 4) $(4, 3, -11)$, 6; 5) $(2, 5, 3)$, 4. **33.** 1) $(-1, 3)$; 2) $(5, -5)$; 3) $(-3, 6)$; 4) $(-1, 1)$; 5) $(5, -7)$. **34.** 1) $(3, 4, 1)$; 2) $(3,5, -1, 5)$; 3) $(-0,5, 5, -4)$; 4) $(2,5, 4, -2)$; 5) $(3,5, -6, 6)$. **35.** 1) $(-15, 5, 1)$; 2) $(10, -7, 11)$; 3) $(0, -1, 3)$; 4) $(-9, 5, -1)$; 5) $(-1, 1, 1)$. **36.** 1) $(3, 3)$; 2) $(1, 0)$; 3) $(1, 1, -2)$; 4) $(3, 2, -2)$; 5) $(-3, -2, 0)$. **37.** 1) taip; 2) ne; 3) ne; 4) taip; 5) taip. **38.** $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{26}$, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{34}$; 2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{20}$, $|\overrightarrow{CD}|=6$; 3) $|\overrightarrow{AC}|=2$; $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{32}$; 4) $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{113}$, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{57}$; 5) $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{235}$, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{939}$. **39.** 1) -6, 6; 2) $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$; 3) 6; 4) -3, 3; 5) 2. **40.** 1) 1; 2) -2; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1,5; 5) 0. **41.** 1) $\alpha=4$, $\beta=-1,5$; 2) $\alpha=-0,6$, $\beta=-15$; 3) $\alpha=2$, $\beta=-1$; 4) $\alpha=-1,25$, $\beta=1,6$; 5) $\alpha=0,75$, $\beta=-8$. **43.** 1) $\left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$; 2) $(-0,6, 0, 0,8)$; 3) $(0, 0, 1)$ ir $(0, 0, -1)$; 4) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ ir $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{13}, -\frac{\sqrt{20}}{13}, \frac{12}{13}\right)$.
44. 1) $(2, 6,5)$; 2) $(2, -2)$; 3) $(1, -1, 3)$; 4) $(-1, 2, 1,5)$; 5) $(-1, 3,5, -2)$. **45.** 1) $(2, 11)$; 2) $(8, -3)$; 3) $(-5, 1)$; 4) $(-4, 4, 9)$; 5) $(1, -4, -1)$. **46.** 1) $\left(-\frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right)$; 2) $\left(-\frac{7}{4}, 2\right)$; 3) $\left(3, \frac{29}{5}\right)$; 4) $\left(5, \frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right)$; 5) $(8, 0, -8)$. **47.** 1) $\left(\frac{12}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ $(3, 1)$; 2) $\left(-3, -\frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{9}\right)$; 3) $\left(\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right)$; 4) $\left(1, \frac{10}{3}, -1\right)$, $(2, 4, -3)$; 5) $\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right)$; $\left(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$. **48.** $(-3, -1)$, $(1, 0)$, $(5, 1)$, $(9, 2)$. **49.** $A(5, 0, -12)$, $B(-4, 6, 15)$. **50.** $(-5,5, -2,5, -0,5)$, $(-3, -5, 0)$, $(-0,5, -7,5, 1,5)$. **51.** 2,5. **52.** 1) taip; 2) ne; 3) taip; 4) ne; 5) ne. **53.** 1) 20; 2) 40; 3) 0; 4) -20; 5) -40. **54.** 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{19}$; 3) 1; 4) $6\sqrt{3}$; 5) -25. **55.** 1) 19; 2) $\sqrt{7}$; 3) 2; 4) 3; 5) 27. **56.** 1) $\sqrt{19}$; 2) 7; 3) $-133,5$; 4) -43; 5) 96. **57.** 15, $\sqrt{593}$. **58.** $\sqrt{21}$, $\sqrt{7}$. **59.** 40. **60.** 60°. **61.** $\approx 6,1$ N. **62.** $\approx 29,4$ N. **63.** $\approx 22,4$ N. **64.** 1) 4; 2) -8; 3) 2; 4) -2; 5) 6. **65.** 0. **66.** -3. **67.** c^2. **68.** 1) $\frac{a^2}{2}$; 2) $-\frac{a^2}{2}$; 3) $-\frac{a^2}{2}$; 4) $\frac{a^2}{4}$; 5) $-\frac{a^2}{4}$. **69.** 1) 2; 2) -25; 3) 2; 4) -15; 5) 9. **70.** 1) 7; 2) 6,5; 3) -1; 4) 10; 5) 20. **71.** 1) 45°; 2) 105°15′; 3) 135°; 4) 154°46′; 5) 40°2′. **72.** 1) taip; 2) ne; 3) taip; 4) taip; 5) ne. **73.** 1) 1; 2) 4; 3) 2; 4) -2; 5) -6. **74.** 1) statusis; 2) bukasis; 3) smailusis; 4) statusis; 5) bukasis. **75.** 120°. **76.** 3, $\frac{2}{27}$. **77.** $\frac{1}{2}$. **78.** 7, $\frac{43}{35\sqrt{2}}$. **79.** 1) $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{i})}=\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{j})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{i})}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{j})}=\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{i})}=\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{j})}=\frac{2}{3}$, $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{k})}=-\frac{1}{3}$; 4) $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{i})}=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{j})}=0$, $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{k})}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; 5) $\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{i})}=\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{j})}=\cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{k})}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **80.** $(1, 1)$. **81.** $(2, -3, 0)$. **82.** $(4, 2)$. **83.** $(6, 12, 6)$. **84.** $(-48, 64, 60)$. **85.** $(4\sqrt{2}, -2,$

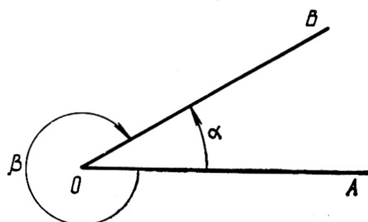
8). **86.** (−2, 2, 1). **87.** (−4, −6, 12). **88.** (−2, 0, −3). **89.** (−1,5, 2,5, 3). **91.** 36°52′. **92.** 1) 90°; 2) 90°; 3) 60°; 4) 60°; 5) 45°. **93.** 84. **94.** 32. **95.** 10. **96.** 1) 30; 2) 105. **97.** 1) 48; 2) 588; 3) 108. **98.** 1) (10, −6, 2); 2) (6, 1, 9). **99.** (10, 2, 14). **100.** (20, 4, 28). **101.** 11. **102.** 18. **103.** 2. **104.** 3,8. **105.** $\frac{17}{2}$.

7. TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

7.1. Kampo sąvoka. Kampų matavimas

Bet kokį kampą plokštumoje galime nagrinėti kaip *spindulio* arba *vektoriaus posūkį* apie jo pradžios tašką.

Pavyzdžiui, kampas AOB gautas sukant spindulį OA apie pradžios tašką O iki padėties OB (191 pav.).



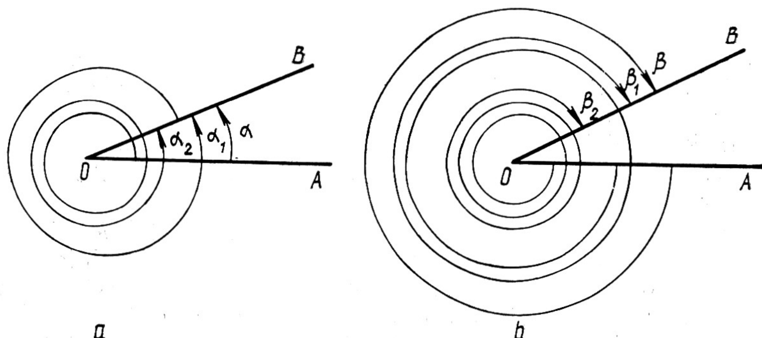
191 pav.

Spindulį OA galime sukti iki padėties OB dviem kryptimis: laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi arba jai priešinga.

Kampus, gautus spinduliui sukantis prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį, vadinsime *teigiamaisiais,* o laikrodžio rodyklės kryptimi — *neigiamaisiais.*

191 paveiksle α — teigiamasis kampas, o β — neigiamasis.

Spindulys OA padėtyje OB gali atsirasti padaręs vieną, du ir daugiau pilnų apsisukimų prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį arba pagal ją ir dar pasisukęs atitinkamai kampu α ar β (192 pav.).



192 pav.

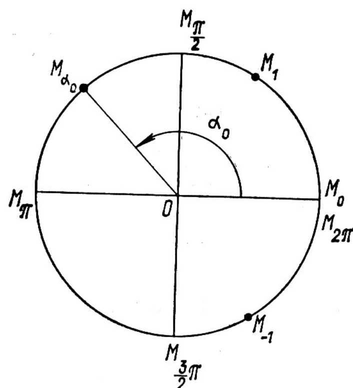
Todėl du spinduliai, išeinantys iš vieno taško, nustato be galo daug teigiamųjų ir neigiamųjų kampų. 192 paveiksle, *a*, pavaizduoti teigiamieji kampai α, α_1, α_2, o 192 paveiksle, *b*,— neigiamieji kampai β, β_1 ir β_2.

Kampų matavimo vienetu gali būti paimtas bet koks kampas. Tačiau jau daugiau kaip tris tūkstantmečius kampų matavimo vienetu imama $\frac{1}{360}$ viso apsisukimo dalis, vadinama *laipsniu* $\left(\frac{1}{60}\right.$ laipsnio dalis vadinama *minute*, o $\frac{1}{60}$ minutės dalis — *sekunde* $\left.\right)$.

Technikoje kampų matavimo vienetu laikomas *visas apsisukimas*. Jūreivystėje kampai matuojami *rumbais*. Rumbas — $\frac{1}{32}$ viso apsisukimo dalis.

Praktikoje vartojami ir kitokie kampų matavimo vienetai, iš kurių populiariausias — *radianas* (spindulinis vienetas).

Imkime apskritimą, kurio spindulys lygus mastelio vienetui. Jį vadinsime vienetiniu apskritimu. Atskaitos pradžia vienetiniame apskritime imkime tašką M_0 — dešinįjį horizontalaus skersmens galą (193 pav.). Kiekvienam skaičiui $\alpha_0 \in (0, 2\pi)$ priskirsime tokį vienetinio apskritimo tašką M_{α_0}, kad lanko $M_0M_{\alpha_0}$ ilgis būtų lygus α_0. Susitarsime lanką $M_0M_{\alpha_0}$ atidėti nuo taško M_0 prieš laikrodžio rodyklę.



193 pav.

Kiekvienam skaičiui $\alpha_0 \in (-2\pi, 0)$ priskirsime tokį vienetinio apskritimo tašką, kad lanko $M_0M_{\alpha_0}$ ilgis būtų lygus $|\alpha_0|$ ir lankas būtų atidedamas pagal laikrodžio rodyklę. Skaičiams 0, 2π, -2π priskirsime vieną ir tą patį tašką M_0.

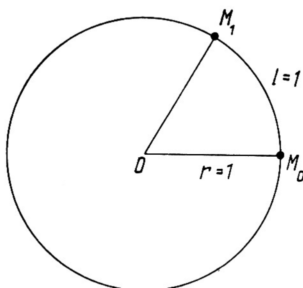
Bet kokį skaičių α galime užrašyti šitaip: $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$; čia $k \in Z$, o $\alpha_0 \in (-2\pi, 2\pi)$. Skaičiui α priskiriamas tas pats vienetinio apskritimo taškas kaip ir skaičiui α_0. Tokiu būdu sudaroma atitiktis tarp realiųjų skaičių aibės ir vienetinio apskritimo taškų aibės.

Skaičius α vadinamas lanko M_0M_α ir jį atitinkančio centrinio kampo *radianiniu matu*. Radianinio matavimo vienetas yra *radianas*.

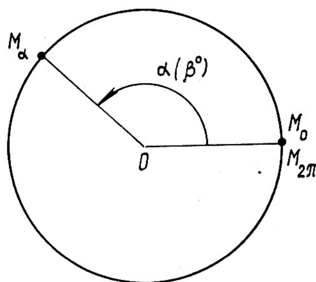
Radianas — tai kampas, lygus centriniam vienetinio apskritimo kampui, kuris remiasi į vieneto ilgio lanką (194 pav.).

Išsiaiškinsime, kaip susiję radianinis ir laipsninis matai.

Sakykime, kad kokio nors kampo M_0OM_α didumas radianais yra α, o laipsniais — $\beta°$ (195 pav.).



194 pav.



195 pav.

Kadangi viso apsisukimo didumas radianais yra 2π, o laipsniais — 360°, tai

$$\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\beta°}{360°}, \text{ arba } \frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta°}{180°}. \qquad (1)$$

Iš šios proporcijos išreiškiame kampo didumą radianais, kai žinomas jo didumas laipsniais:

$$\boxed{\alpha=\frac{\pi}{180°}\beta°} \qquad (2)$$

arba kampo didumą laipsniais, kai žinomas jo didumas radianais:

$$\boxed{\beta°=\frac{180°}{\pi}\alpha.} \qquad (3)$$

Remdamiesi (3) formule, rasime kiek laipsnių atitinka 1 radianas:

$$1 \text{ radianas}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°\,17'\,45''\approx 57{,}3°.$$

Remdamiesi (2) formule, randame kiek radianų atitinka 1 laipsnis:

$$1°=\frac{\pi}{180°}\approx 0{,}0175 \text{ rad}.$$

Laipsninius kampo matus galima pakeisti radianiniais ir atvirkščiai, naudojantis V. Bradžio „Keturženklėmis matematinėmis lentelėmis“ arba skaičiuotuvais. Parodysime, kaip tai atliekama skaičiuotuvu „Elektronika Б3-36“.

Pavyzdžiai. 1. Naudodamiesi skaičiuotuvu, radianais išreikšime kampus: a) 47° 15′; b) 152° 13′.

a) Pirmiausia minutes paverčiame laipsnio dalimis (15 : 60 = 0,25), po to surenkame reikiamą skaičių ir nuspaudžiame klavišus | F | ir | P → Γ |.

Taigi

$$47°\,15' = 47{,}25° \approx 0{,}825 \text{ (rad)}.$$

b) Panašiai randame

$$152°\,13' \approx 152{,}22° \approx 2{,}66 \text{ (rad)}.$$

2. Naudodamiesi skaičiuotuvu, išreikšime laipsniais šiuos kampus: a) 7,83; b) 0,483.

a) Pirmiausia surenkame reikiamą skaičių (kampą radianais) ir nuspaudžiame klavišus | F | ir | P → Γ |, po to trupmeninę laipsnio dalį paverčiame minutėmis (0,62594 × 60 = 37,95564). Gauname

$$7{,}83 \approx 448{,}62594° \approx 448°\,38'.$$

b) Panašiai randame

$$0{,}483 \approx 27{,}673861° \approx 27°\,40'.$$

P a s t a b a. Jeigu kampai matuojami radianais, tai dimensija paprastai nerašoma.

Lentelėje pateikti dažniau pasitaikančių kampų didumai laipsniais ir radianais.

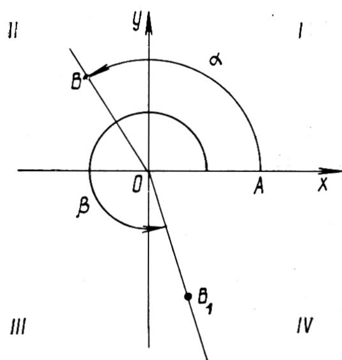
Kampo didumas laipsniais	0°	1°	10°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	β°
radianais	0 0,000(	$\frac{\pi}{180}$ 0,0175	$\frac{\pi}{18}$ 0,1745	$\frac{\pi}{6}$ 0,5236	$\frac{\pi}{4}$ 0,7854	$\frac{\pi}{3}$ 1,0472	$\frac{\pi}{2}$ 1,5708	π 3,1416	$\frac{3}{2}\pi$ 4,7124	2π 6,2832	$\frac{\pi}{180}\beta°$ 0,0175 $\beta°$

7.2. Skaitinio argumento trigonometrinės funkcijos

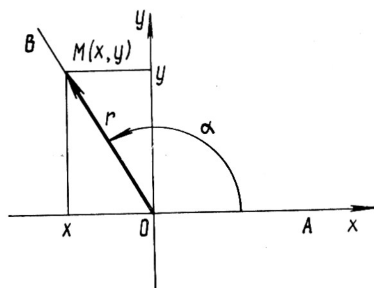
Sakykime, plokštumoje duota stačiakampė koordinačių sistema xOy. Pradinė spindulio OA padėtis sutampa su teigiamąja ašies Ox kryptimi. Pasisukęs kampu α, spindulys OA pereina į padėtį OB.

Priklausomai nuo to, kuriame ketvirtyje po posūkio atsiranda spindulys OB, sakoma, kad kampas priklauso tam ketvirčiui.

196 paveiksle α yra antrajame ketvirtyje, o β — ketvirtajame ketvirtyje.



196 pav.



197 pav.

Jeigu spindulys yra ašyje Ox arba Oy, tai kampas paprastai nepriskiriamas nė vienam ketvirčiui. Spindulyje OB atidedame vektorių $\overrightarrow{OM}=(x, y)$. Vektoriaus modulį žymime r (197 pav.).

Kampo α, kurį vektorius sudaro su teigiamąja ašies Ox kryptimi, sinusu vadiname vektoriaus ordinatės ir jo modulio santykį:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}. \qquad (1)$$

Kampo α, kurį vektorius sudaro su teigiamąja ašies Ox kryptimi, kosinusu vadiname vektoriaus abscisės ir jo modulio santykį:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}. \qquad (2)$$

Kampo α, kurį vektorius sudaro su teigiamąja ašies Ox kryptimi, tangentu vadiname vektoriaus ordinatės ir abscisės santykį:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x} \text{ (kai } x\neq 0\text{)}. \qquad (3)$$

Kampo α, kurį vektorius sudaro su teigiamąja ašies Ox kryptimi, kotangentu vadiname vektoriaus abscisės ir ordinatės santykį:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y} \text{ (kai } y\neq 0\text{)}. \qquad (4)$$

Lengva pastebėti, kad bet kokio kampo α sinusas ir kosinusas yra apibrėžti, nes reiškiniai x/r ir y/r apibrėžti esant bet kokiai teigiamai r reikšmei.

Iš (3) formulės išplaukia, kad tangentas neapibrėžtas, kai $x=0$, nes dalyba iš nulio negalima. Vektoriaus abscisė lygi nuliui, kai vektorius statmenas ašiai Ox. Šiuo atveju vektorius su ašimi Ox su-

daro $\pm 90°$, $\pm 270°$, $\pm 450°$ ir t. t. didumo kampus, kuriuos galime užrašyti formule $\alpha = 90°(2k+1)$; čia $k \in Z$.

Vadinasi, $\operatorname{tg} \alpha$ apibrėžtas su visomis α reikšmėmis, išskyrus $\alpha = 90°(2k+1)$, $k \in Z$.

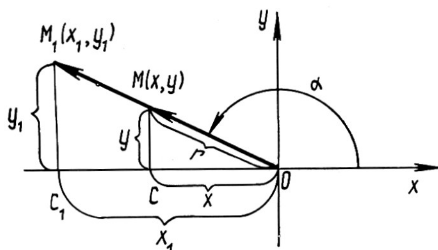
Panašiai kotangentas ((4) formulė) yra neapibrėžtas, kai $y=0$, t. y. vektorius statmenas ašiai Oy ir sudaro su ašimi Ox $0°$, $\pm 180°$, $\pm 360°$ ir t. t. didumo kampus, t. y. kai $\alpha = 180° k$, $k \in Z$.

Taigi $\operatorname{ctg} \alpha$ apibrėžtas su visomis α reikšmėmis, išskyrus $\alpha = 180° k$, $k \in Z$.

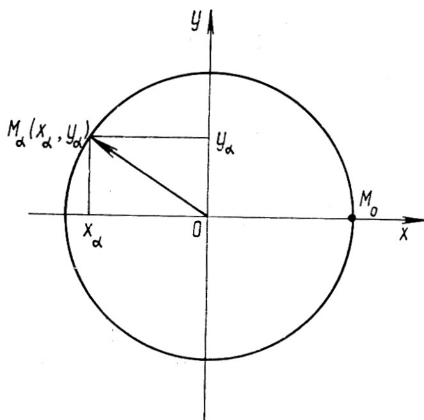
P a s t a b a. Kai $0° < \alpha < 90°$, nagrinėjamieji apibrėžimai sutampa su smailiojo kampo trigonometrinių funkcijų apibrėžimais stačiajame trikampyje.

Įrodysime, kad trigonometrinių funkcijų reikšmės nepriklauso nuo vektoriaus ilgio.

Imkime du vektorius: $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ ir $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1)$, kurie su ašimi Ox sudaro kampą α ir jų ilgiai yra r ir r_1 (198 pav.).



198 pav.



199 pav.

Statieji trikampiai OMC ir OM_1C_1 — panašūs, todėl jų kraštinės proporcingos:

$$\frac{MC}{MO} = \frac{M_1C_1}{M_1O}, \text{ t. y. } \frac{y}{r} = \frac{y_1}{r_1} = \sin \alpha;$$

$$\frac{OC}{MO} = \frac{OC_1}{M_1O}, \text{ t. y. } \frac{|x|}{r} = \frac{|x_1|}{r_1}.$$

Taškai M ir M_1 yra viename ketvirtyje, todėl x ir x_1 vienodo ženklo ir

$$\frac{x}{r} = \frac{x_1}{r_1} = \cos \alpha.$$

Panašiai galime įrodyti, kad tangento ir kotangento reikšmės taip pat nepriklauso nuo vektoriaus ilgio.

Kadangi trigonometrinių funkcijų reikšmės nepriklauso nuo vektoriaus ilgio, tai iš visų vektorių, kurių pradžia sutampa su koordinačių pradžia, galime nagrinėti vektorius, kurių modulis lygus vienetui ($r=1$). Šių vektorių pabaigos taškai yra vienetinio apskritimo taškai. Tokiu atveju kampo α sinusas yra vienetinio vektoriaus ordinatė, o kosinusas — abscisė.

Kadangi kampus matuojame ir radianais, t. y. realiaisiais skaičiais, kurie atvaizduojami į vienetinio apskritimo taškus, tai trigonometrinių funkcijų argumentu galime laikyti tiesiog skaičių.

199 paveiksle pavaizduotas vienetinis apskritimas ir jame nurodytas taškas M_α (x_α, y_α), į kurį atvaizduotas skaičius α.

Skaičiaus α *sinusu* vadiname vienetinio apskritimo taško, į kurį atvaizduotas skaičius α, ordinatę:

$$\boxed{\sin \alpha = y_\alpha .}$$

Skaičiaus α *kosinusu* vadiname vienetinio apskritimo taško, į kurį atvaizduotas skaičius α, abscisę:

$$\boxed{\cos \alpha = x_\alpha .}$$

Skaičiaus α *tangentu* vadiname vienetinio apskritimo taško, į kurį atvaizduotas skaičius α, ordinatės ir abscisės santykį:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}}$$

(kai $x_\alpha \neq 0$).

Skaičiaus α *kotangentu* vadiname vienetinio apskritimo taško, į kurį atvaizduotas skaičius α, abscisės ir ordinatės santykį:

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}}$$

(kai $y_\alpha \neq 0$).

Kartais, be keturių pagrindinių trigonometrinių funkcijų, nagrinėjamos dar dvi funkcijos — sekantas ir kosekantas.

Skaičiaus α *sekantu* vadiname dydį, atvirkščią skaičiaus α kosinusui:

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} .}$$

Skaičiaus α *kosekantu* vadiname dydį, atvirkščią skaičiaus α sinusui:

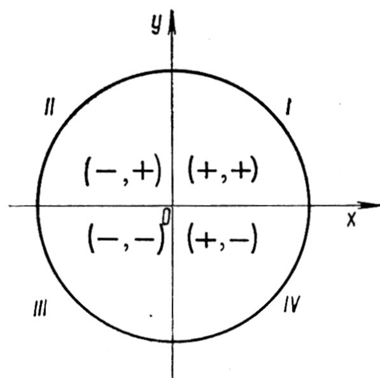
$$\boxed{\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} .}$$

7.3. Trigonometrinių funkcijų ženklai ir kitimas

7.3.1. Trigonometrinių funkcijų ženklai. Skaitinio argumento trigonometrinių funkcijų ženklus nulemia ketvirtis, į kurį atvaizduojamas skaičius α.

Sakykime, skaičius α atvaizduojamas į vienetinio apskritimo tašką $M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ (199 pav.).

200 paveiksle pažymėti visuose ketvirčiuose esančių taškų koordinačių ženklai.



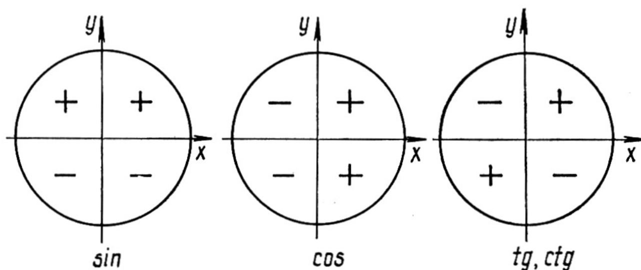
200 pav.

Kadangi $\sin\alpha = y_\alpha$, tai sinuso reikšmės pirmajame ir antrajame ketvirtyje — teigiamos, o trečiajame ir ketvirtajame — neigiamos.

Žinome, kad $\cos\alpha = x_\alpha$, todėl kosinuso reikšmės teigiamos pirmajame ir ketvirtajame ketvirtyje, o neigiamos — antrajame ir trečiajame.

Kadangi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ ir $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, tai tų funkcijų reikšmės teigiamos, kai abi koordinatės vienodų ženklų, t. y. pirmajame ir trečiajame ketvirtyje. Tangento ir kotangento reikšmės neigiamos, kai abi koordinatės priešingų ženklų, t. y. antrajame ir ketvirtajame ketvirtyje.

Trigonometrinių funkcijų ženklus lengviau įsiminti naudojantis 201 paveikslu.

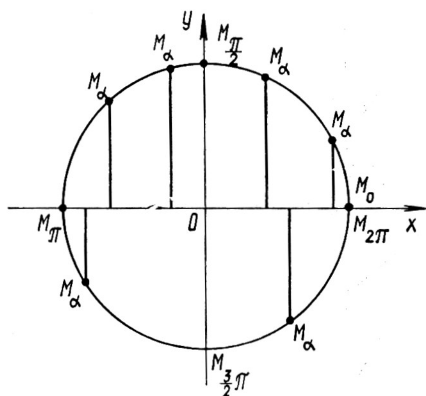


201 pav.

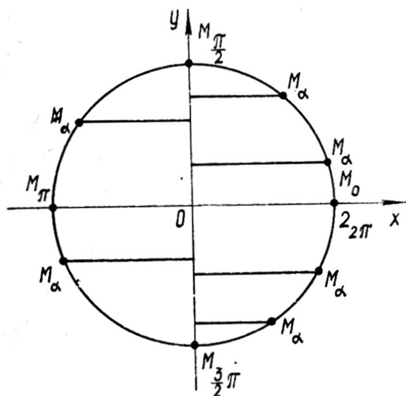
7.3.2. Trigonometrinių funkcijų reikšmių kitimas, kai argumentas kinta intervale [0, 2π]. Sinuso kitimas. Remiantis apibrėžimu,

$$\sin\alpha = y_\alpha.$$

Kintant argumentui α nuo 0 iki 2π, sinusas įgyja visas galimas vienetinio apskritimo taškų ordinačių reikšmes, t. y. $\sin\alpha \in [-1, 1]$ (202 pav.).



202 pav.



203 pav.

Kosinuso kitimas. Pagal apibrėžimą

$$\cos\alpha = x_\alpha.$$

Kintant argumentui α nuo 0 iki 2π, kosinusas įgyja visas galimas vienetinio apskritimo taškų abscisių reikšmes, t. y. $\cos\alpha \in [-1, 1]$ (203 pav.).

Tangento kitimas. Tangentas apibrėžiamas lygybe

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}, \text{ kai } x_\alpha \neq 0.$$

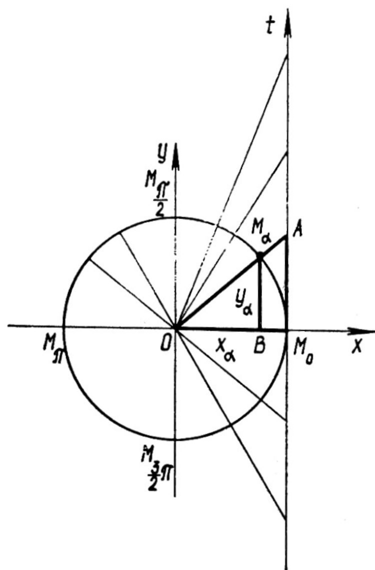
Nagrinėsime, kaip kinta santykis y_α/x_α. Tuo tikslu per vienetinio apskritimo tašką M_0 lygiagrečiai ašiai Oy nubrėžiame ašį, vadinamą *tangentų ašimi,* arba *tangente.* Jos kryptis sutampa su ašies Oy kryptimi.

Nubrėžiame vienetinio apskritimo spindulį OM ir jį pratęsiame iki susikirtimo su tangente taške A. 204 paveiksle matome, kad

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{M_0A}{OM_0} = \frac{M_0A}{1} = M_0A.$$

Kintant α nuo 0 iki 2π, tg α keisis taip, kaip keisis kryptinė atkarpa M_0A, t. y. $\operatorname{tg}\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

Atkreipsime dėmesį, kad $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ ir $\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi$ apskaičiuoti negalime (spindulių, išvestų į taškus $M_{\pi/2}$ ir $M_{3/2\pi}$, tęsiniai nekerta tangentės).



204 pav.

Kotangento kitimas. Kotangentas apibrėžiamas lygybe $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$, kai $y_\alpha\neq 0$.

Per tašką $M_{\pi/2}$, kuriame vienetinis apskritimas kerta teigiamąją ašies Oy dalį, išvedame ašį, lygiagrečią ašiai Ox. Jos kryptis sutampa su ašies Ox kryptimi. Ši ašis vadinama ***kotangentų ašimi***, arba ***kotangente***.

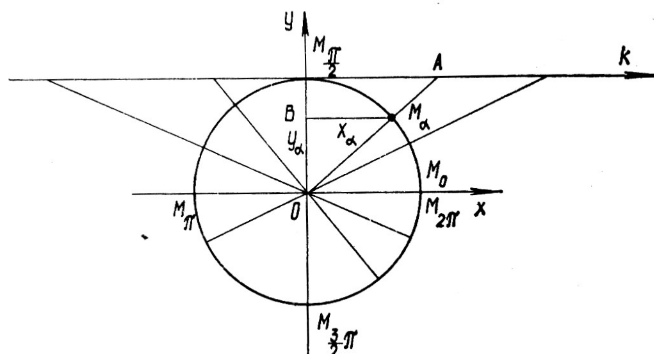
Nubrėžiame vienetinio apskritimo spindulį OM ir pratęsiame iki susikirtimo su kotangente taške A (205 pav.). Matome, kad

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x_\alpha}{y_\alpha}=\frac{M_{\pi/2}A}{M_{\pi/2}O}=\frac{M_{\pi/2}A}{1}=M_{\pi/2}A.$$

Kintant α nuo 0 iki 2π, $\operatorname{ctg}\alpha$ keisis taip, kaip keisis kryptinė atkarpa $M_{\pi/2}A$, t. y. $\operatorname{ctg}\alpha\in(-\infty, +\infty)$.

$\operatorname{ctg}0$ ir $\operatorname{ctg}\pi$ apskaičiuoti negalima (spindulių, išvestų į taškus M_0 ir M_π, tęsiniai nekerta kotangentės).

Trigonometrinių funkcijų kitimą atskiruose ketvirčiuose iliustruoja lentelė, kurioje žodis „didėja“ pakeistas ženklu $\uparrow$, o žodis „mažėja“— ženklu $\downarrow$.



205 pav.

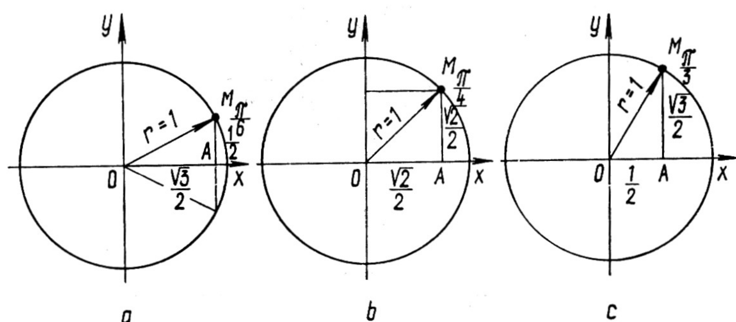
Funkcija \ α	$0 \uparrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \uparrow \pi$	$\pi \uparrow \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi \uparrow 2\pi$
sin α	$0 \uparrow 1$	$1 \downarrow 0$	$0 \downarrow -1$	$-1 \uparrow 0$
cos α	$1 \downarrow 0$	$0 \downarrow -1$	$-1 \uparrow 0$	$0 \uparrow 1$
tg α	$0 \uparrow +\infty$	$-\infty \uparrow 0$	$0 \uparrow +\infty$	$-\infty \uparrow 0$
ctg α	$+\infty \downarrow 0$	$0 \downarrow -\infty$	$+\infty \downarrow 0$	$0 \downarrow -\infty$

7.4. Kai kurių argumentų trigonometrinių funkcijų reikšmės

Spręsdami uždavinius dažnai naudosimės lentelėje pateiktų argumentų trigonometrinių funkcijų reikšmėmis.

Trigonometrinė funkcija	Argumentas							
	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Parodysime kaip apskaičiuojamos argumento $\frac{\pi}{6}$ trigonometrinių funkcijų reikšmės (206 pav., *a*).



206 pav.

Skaičiaus $\pi/6$ vaizdas vienetiniame apskritime yra taškas $M_{\pi/6}$. Šio taško koordinates randame išnagrinėję statųjį trikampį $OM_{\pi/6}A$. Statinis, esantis prieš $\frac{\pi}{6}$ didumo kampą, lygus pusei įžambinės, t. y. $M_{\pi/6}A = y_{\pi/6} = \frac{1}{2}$.

Antrąjį statinį apskaičiuojame pagal Pitagoro teoremą:

$$OA = x_{\pi/6} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Taigi

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

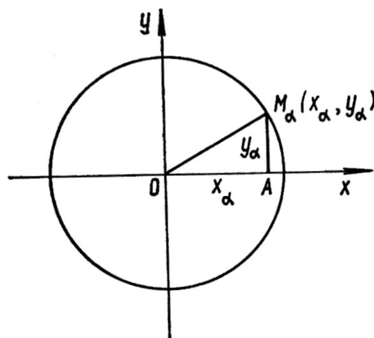
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{y_{\pi/6}}{x_{\pi/6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{x_{\pi/6}}{y_{\pi/6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Panašiai apskaičiuojamos $\frac{\pi}{4}$ ir $\frac{\pi}{3}$ argumentų trigonometrinių funkcijų reikšmės (206 pav., *b*, *c*).

7.5. To paties argumento trigonometrinių funkcijų sąryšiai

Sakykime, skaičius α atvaizduotas į vienetinio apskritimo tašką $M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$. Kadangi vienetinio (207 pav.) apskritimo bet kurio



207 pav.

taško koordinatės tenkina lygybę $y_\alpha^2 + x_\alpha^2 = 1$, tai, remdamiesi trigonometrinių funkcijų apibrėžimais

$$y_\alpha = \sin\alpha \text{ ir } x_\alpha = \cos\alpha,$$

gauname

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

(1) lygybės kairiojoje pusėje užrašytą reiškinį vadiname *trigonometriniu vienetu.*

Pasirėmę tangento ir kotangento apibrėžimais, gauname

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Taigi

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},} \qquad (2)$$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},} \qquad (3)$$

$\alpha \neq \pi k, \quad k \in Z.$

Sudauginę panariui (2) ir (3) lygybes, gauname

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.} \tag{4}$$

Ši lygybė teisinga su visomis argumento α reikšmėmis, su kuriomis $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\alpha$ yra apibrėžti, t. y. $\alpha\in R$, išskyrus $\alpha=\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

(1) tapatybės abi puses padaliję iš $\cos^2\alpha$, gauname

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},} \tag{5}$$

padaliję iš $\sin^2\alpha$, gauname

$$\boxed{\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.} \tag{6}$$

Pasinaudoję sekanto ir kosekanto apibrėžimais, (5) ir (6) formules užrašome šitaip:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha,} \tag{7}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\operatorname{cosec}^2\alpha.} \tag{8}$$

(1)—(6) lygybės vadinamos *pagrindinėmis trigonometrinėmis tapatybėmis.*

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, kai $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ ir $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Iš (1) formulės

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Argumentas α yra ketvirtajame ketvirtyje, todėl sinusas šiame ketvirtyje yra neigiamas:

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=-\frac{15}{17}.$$

Remdamiesi (2) ir (4) lygybėmis, gauname:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(-\frac{15}{17}\right):\frac{8}{17}=-\frac{15}{8},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{-\frac{15}{8}}=-\frac{8}{15}.$$

2. Supaprastinkime reiškinį

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Remdamiesi (4) ir (7) tapatybėmis, gauname

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha.$$

3. Įrodykime tapatybę

$$\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha.$$

Pertvarkome kairiąją pusę naudodamiesi kubų skirtumo formule ir šio skyrelio (1) tapatybe:

$$\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha.$$

4. Suprastinkime reiškinį $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

ir apskaičiuokime jo reikšmę, kai $\sin\alpha=-\frac{1}{8}$.

Subendravardiklinę ir pritaikę (1) formulę, gauname:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}=$$

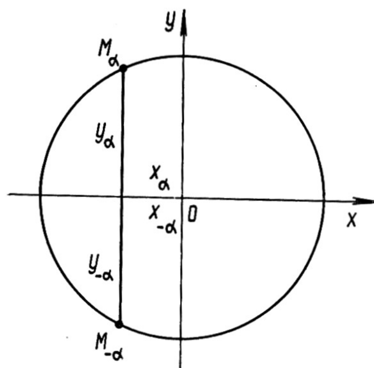
$$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

Kai $\sin\alpha=-\frac{1}{8}$, reiškinio reikšmė lygi -16.

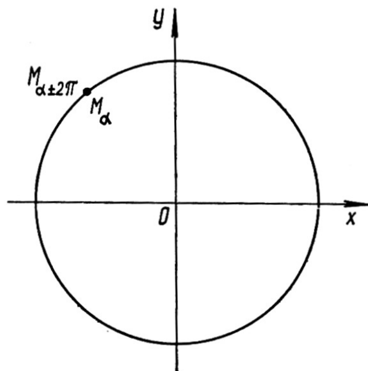
7.6. Paprasčiausios trigonometrinių funkcijų savybės

1. *Kosinusas yra lyginė funkcija, o sinusas, tangentas ir kotangentas — nelyginės funkcijos.*

Sakykime, skaičius α atvaizduotas į vienetinio apskritimo tašką M_α. Skaičius $-\alpha$ atvaizduotas į tašką $M_{-\alpha}$ (208 pav.). Taško M_α koordinatės yra x_α ir y_α arba $\cos\alpha$ ir $\sin\alpha$. Taško $M_{-\alpha}$ koordina-



208 pav.



209 pav.

tės $-x_{-\alpha}$ ir $y_{-\alpha}$ arba $\cos(-\alpha)$ ir $\sin(-\alpha)$. Kadangi taškai M_α ir $M_{-\alpha}$ simetriški ašies Ox atžvilgiu, tai jų abscisės sutampa, o ordinatės yra priešingų ženklų, t. y.

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha \text{ ir } \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

su bet kokiu $\alpha\in R$.

Vadinasi, *kosinusas yra lyginė, o sinusas — nelyginė funkcija.*

Nagrinėkime tangentą ir kotangentą:

$$\text{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\text{tg}\,\alpha;\quad \alpha\in R,\quad \alpha\neq\frac{2}{\pi}+\pi k,\quad k\in Z;$$

$$\text{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\text{ctg}\,\alpha;\quad \alpha\in R, \alpha\neq\pi k,\quad k\in Z.$$

Taigi

$$\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha \text{ ir } \text{ctg}(-\alpha)=-\text{ctg}\,\alpha.$$

Vadinasi, *tangentas ir kotangentas — nelyginės funkcijos.*

Pavyzdžiai.

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

2. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3. $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\text{tg}\,\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

2. *Sinusas, kosinusas, tangentas ir kotangentas yra periodinės funkcijos.*

Sinuso ir kosinuso funkcijos apibrėžtos su visais $\alpha\in(-\infty, +\infty)$, todėl $\alpha\pm2\pi$ priklauso jų apibrėžimo sričiai. Skaičiai α, $\alpha\pm2\pi$ atvaizduojami į vieną ir tą patį vienetinio apskritimo tašką M_α (209 pav.), todėl

$$\sin(\alpha\pm2\pi)=\sin\alpha$$

ir

$$\cos(\alpha\pm2\pi)=\cos\alpha.$$

Taigi skaičius 2π yra sinuso ir kosinuso periodas.

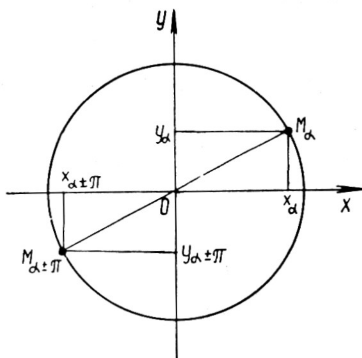
Tarkime, kad egzistuoja periodas T, $T<2\pi$, t. y. $0<T<2\pi$. Parodysime, kad lygybė $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$ negalioja, kai $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Leiskime priešingai, kad $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin\frac{\pi}{2}$. Tada $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=1$. Tai reiškia, kad $\frac{\pi}{2}+T=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; iš čia $T=2\pi k$.

Todėl 2π — mažiausias teigiamas sinuso periodas.

Panašiai įsitikintume, kad 2π — mažiausias teigiamas kosinuso periodas.

Jeigu prie argumento α, priklausančio funkcijų $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\alpha$ apibrėžimo sričiai, pridėsime arba atimsime 2π, tai tų funkcijų reikšmės taip pat nepasikeis. Tačiau nesunku įsitikinti, kad mažiausias teigiamas tangento ir kotangento periodas yra π.

Skaičius α atvaizduojamas į vienetinio apskritimo tašką M . Skaičiai $\alpha+\pi$ ir $\alpha-\pi$ atvaizduojami į tašką $M_{\alpha\pm\pi}$ (210 pav.), kuris simetriškas taškui M_α koordinačių pradžios atžvilgiu. Todėl taš-



210 pav.

kų M_α ir $M_{\alpha\pm\pi}$ atitinkamų koordinačių moduliai yra lygūs, bet priešingų ženklų. Taigi

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\frac{y_{\alpha\pm\pi}}{x_{\alpha\pm\pi}}=\frac{-y_\alpha}{-x_\alpha}=\frac{y_\alpha}{x_\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=\frac{x_{\alpha\pm\pi}}{y_{\alpha\pm\pi}}=\frac{-x_\alpha}{-y_\alpha}=\frac{x_\alpha}{y_\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Žinant anksčiau minėtas trigonometrinių funkcijų savybes, bet kokio argumento trigonometrines funkcijas galima išreikšti trigonometrinėmis funkcijomis, kurių argumentas priklauso intervalui $[0, 2\pi)$.

Pavyzdžiai.

1. $\cos 4\frac{1}{6}\pi=\cos\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2. $\operatorname{tg}\left(-\frac{16}{3}\pi\right)=\operatorname{tg}\left(-5\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$;

3. $\sin 765^\circ=\sin(2\cdot 360^\circ+45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

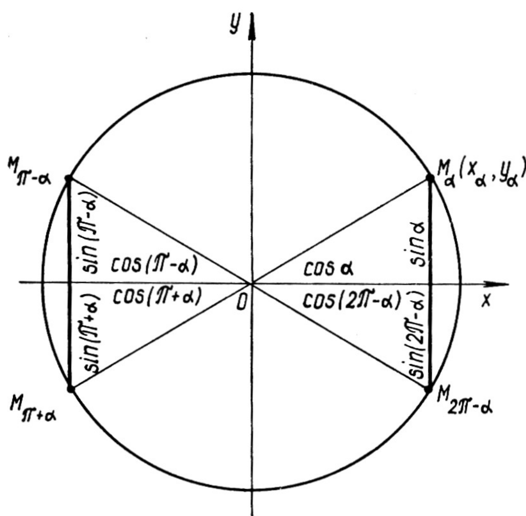
4. $\operatorname{ctg} 575^\circ=\operatorname{ctg}(3\cdot 180^\circ+35^\circ)=\operatorname{ctg} 35^\circ$.

7.7. Redukcijos formulės

Trigonometrines funkcijas, kurių argumentas yra $\frac{\pi}{2}k\pm\alpha$, $k\in Z$ ir $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, galima pakeisti argumento α trigonometrinėmis funkcijomis. Formulės, kuriomis remiantis atliekamas šis keitimas, vadinamos *redukcijos formulėmis.*

Nagrinėsime, kaip gaunamos redukcijos formulės, kai $k=1$, 2, 3, 4, t. y. kai argumentas lygus $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$.

Vienetiniame apskritime pažymėkime taškus M_α, $M_{\pi-\alpha}$, $M_{\pi+\alpha}$ ir $M_{2\pi-\alpha}$, kurie yra skaičių α, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$ ir $2\pi-\alpha$ vaizdai. 211 paveiksle parodytos tų taškų koordinatės, atitinkančios duotųjų skaičių sinusus ir kosinusus.



211 pav.

Lengvai pastebime, kad

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\qquad\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$

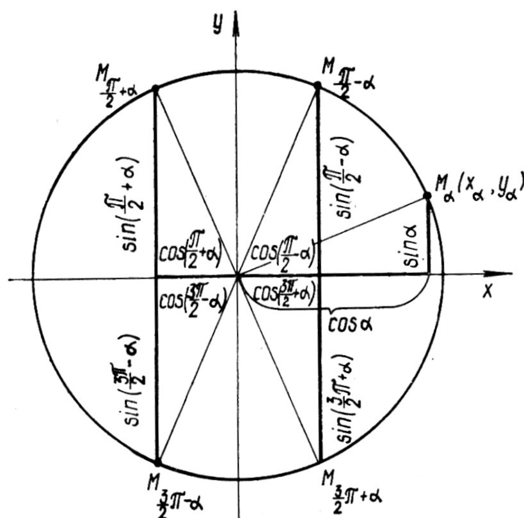
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$ $\qquad\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$

$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,$ $\qquad\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$

Nesunku apskaičiuoti kitas šių argumentų trigonometrinių funkcijų reikšmes. Pavyzdžiui,

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Dabar vienetiniame apskritime pažymėkime taškus M_α, $M_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$, $M_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$, $M_{\frac{3}{2}\pi-\alpha}$, $M_{\frac{3}{2}\pi+\alpha}$, kurie yra skaičių α, $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\frac{3}{2}\pi-\alpha$, $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ vaizdai (212 pav.).



212 pav.

Pastebime, kad

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Galima apskaičiuoti kitas šių argumentų trigonometrinių funkcijų reikšmes. Pavyzdžiui,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Dabar apibendrinsime visas anksčiau užrašytas formules.

1. Jeigu redukuojamosios funkcijos argumentas yra $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$, tai funkcijos pavadinimas nekeičiamas.

2. Jeigu redukuojamosios funkcijos argumentas yra $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$, tai funkcijos pavadinimas keičiamas: sinuso — kosinusu, kosinuso — sinusu, tangento — kotangentu, sekanto — kosekantu, ir atvirkščiai.

3. Prieš redukuotąją funkciją rašomas toks ženklas, kokį turėjo redukuojamoji funkcija, kai $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Trigonometrinėms funkcijoms, kurių argumentas yra $\frac{\pi}{2}k\pm\alpha$, $k=5, 6, 7, \ldots$, taikoma ta pati taisyklė, bet prieš tai atmetami arba pridedami 2π kartotiniai.

Pavyzdžiai. 1. Redukuokime šias funkcijas:

a) $\cos 342°=\cos(360°-18°)=\cos 18°$;

b) $\operatorname{ctg} 153°\,50'=\operatorname{ctg}(180°-26°\,10')=-\operatorname{ctg} 26°\,10'$;

c) $\operatorname{tg} 113°=\operatorname{tg}(90°+23°)=-\operatorname{ctg} 23°$;

d) $\cos 5\frac{1}{6}\pi=\cos 1\frac{1}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{1}{6}\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Supaprastinkime reiškinį:

$$A=\sin(90°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)+\operatorname{tg}(270°+\alpha)+\operatorname{ctg}(360°+\alpha).$$

Remdamiesi redukcijos taisyklėmis, gauname

$$A=\cos\alpha-\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=0.$$

3. Įrodykime tapatybę

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Naudodamiesi redukcijos taisyklėmis, pertvarkome kairiąją tapatybės pusę:

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{-\operatorname{tg}\alpha(-\cos\alpha)}{-\cos\alpha(-\operatorname{ctg}\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

7.8. Trigonometrinių funkcijų grafikai

Braižydami trigonometrinių funkcijų grafikus, kaip paprastai priimta, argumentą žymėsime raide x, o funkciją raide y.

7.8.1. Funkcijos $y=\sin x$ grafikas (sinusoidė). Prisiminkime funkcijos $y=\sin x$ savybes.

1. Funkcijos apibrėžimo sritis: $x \in R$.
2. Funkcijos reikšmių sritis: $y \in [-1, 1]$.
3. Funkcija periodinė. Jos pagrindinis periodas 2π.
4. Funkcija nelyginė, nes $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkcija $y = \sin x$ yra periodinė, todėl užtenka nubraižyti jos grafiką argumento reikšmes imant iš vieno periodo ilgio intervalo, pavyzdžiui, $[-\pi, \pi]$. Ši funkcija yra nelyginė, todėl jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu, taigi užtenka nubraižyti $\sin x$ grafiką imant $x \in [0, \pi]$.

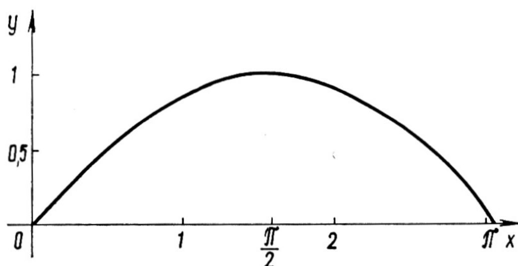
Grafiką braižysime dviem būdais.

P i r m a s i s b ū d a s. Sudarome funkcijos $y = \sin x$ reikšmių lentelę argumento reikšmes imdami iš intervalo $[0, \pi]$.

Sudarydami lentelę, naudojamės skaičiuotuvu arba V. Bradžio „Keturženklėmis matematinėmis lentelėmis".

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	0	0,20	0,39	0,56	0,72	0,84	0,93	0,99	1,00
x	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	π	
$y = \sin x$	0,94	0,91	0,81	0,68	0,52	0,33	0,14	0	

Pasirinkę mastelį, pažymime rastuosius taškus ir sujungiame juos ištisine linija (213 pav.).

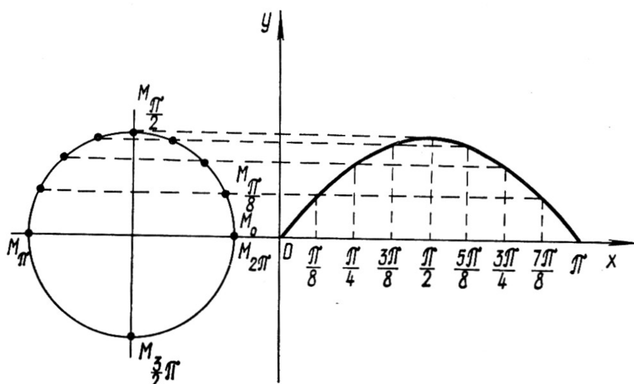


213 pav.

A n t r a s i s b ū d a s. Funkcijos $y = \sin x$ grafiko taškus randame geometriškai.

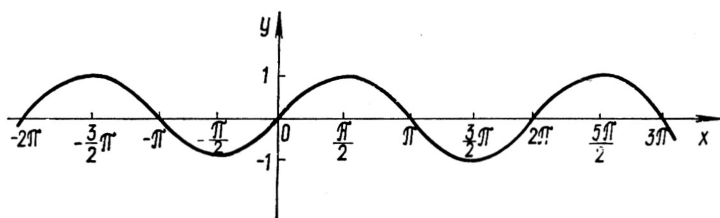
Iš bet kurio ašies Ox taško O_1 nubrėžiame vienetinį apskritimą. **Jo lanką** M_0M_π padalijame į bet kokį skaičių lygių dalių, pavyzdžiui, į aštuonias. Nubrėžiame ašyje Ox nuo koordinačių pradžios taško O atkarpą, kurios ilgis lygus π. Padalijame ją į tiek lygių dalių, į kiek dalių padalijome lanką M_0M_π. Iš dalijimo taškų iškeliame statmenis į ašį Ox ir juose atidedame atitinkamų vienetinio ap-

skritimo taškų ordinates. Gautuosius taškus sujungiame ištisine linija (214 pav.).



214 pav.

Remdamiesi funkcijos $y=\sin x$ periodiškumu bei grafiko simetriškumu koordinačių pradžios atžvilgiu, gauname kreivę, pavaizduotą 215 paveiksle.



215 pav.

Funkcijos $y=\sin x$ grafikas padeda prisiminti tos funkcijos savybes:

funkcija lygi 0, kai $x=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
funkcijos teigiamų reikšmių intervalai: $(2\pi k, \pi+2\pi k)$;
funkcijos neigiamų reikšmių intervalai: $(\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k)$;
funkcijos didėjimo intervalai: $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$;

funkcijos mažėjimo intervalai: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$;

funkcija įgyja didžiausią reikšmę $y=1$, kai $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$;

funkcija įgyja mažiausią reikšmę $y=-1$, kai $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

7.8.2. Funkcijos $y=\cos x$ grafikas (kosinusoidė). Priminsime funkcijos $y=\cos x$ savybes.

1. Funkcijos apibrėžimo sritis: $x \in R$.

2. Funkcijos reikšmių sritis: $y \in [-1, +1]$.

3. Funkcija periodinė. Jos pagrindinis periodas 2π.

4. Funkcija lyginė, nes $\cos(-x) = \cos x$.

Funkcija $y = \cos x$ yra periodinė, todėl užtenka nubraižyti jos grafiką argumento reikšmes imant iš vieno periodo ilgio intervalo, pavyzdžiui, $[-\pi, \pi]$. Ši funkcija yra lyginė, jos grafikas simetriškas ašies Oy atžvilgiu, todėl užtenka jį nubraižyti imant x iš intervalo $[0, \pi]$.

Funkcijos $y = \cos x$ grafiką braižysime geometriškai.

Remdamiesi redukcijos formulėmis rašome

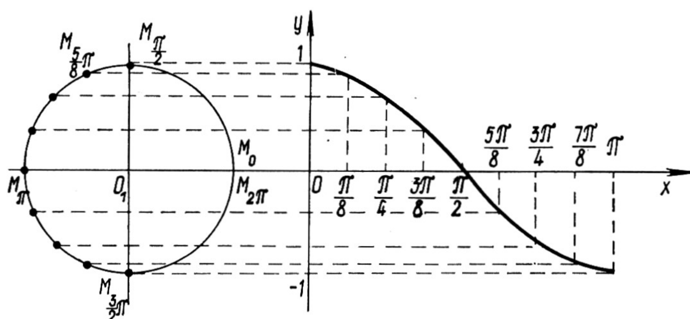
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

t. y.

$$\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{5\pi}{8}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4},$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{7\pi}{8}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = \sin\pi \text{ ir t. t.}$$

Bet kurį ašies Ox tašką O_1 laikydami centru brėžiame vienetinį apskritimą. Ašyje Ox nuo koordinačių pradžios taško O brėžiame atkarpą, kurios ilgis π (216 pav.). Šią atkarpą ir vienetinio apskriti-



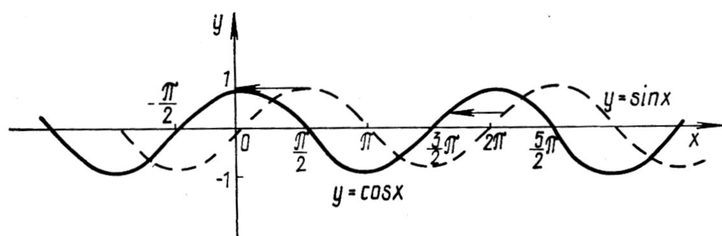
216 pav.

mo lanką $M_{\pi/2}M_{3\pi/2}$ padalysime į tiek pat lygių dalių, pavyzdžiui, į aštuonias. Iš atkarpos dalijimo taškų iškeliame statmenis į ašį Ox ir juose paeiliui atidedame dalijimo taškų ordinates, pradėdami taško $M_{\pi/2}$ ordinate. Gautuosius taškus sujungiame ištisine linija.

Remdamiesi funkcijos $y = \cos x$ periodiškumu ir grafiko simetriškumu ašies Oy atžvilgiu, gauname kreivę, pavaizduotą 217 paveiksle.

Funkcijos $y = \cos x$ grafikas yra sinusoidė, pastumta į kairę atstumu $\frac{\pi}{2}$.

Remdamiesi funkcijos $y=\cos x$ grafiku, užrašykite: funkcijos nulius (t. y. argumento reikšmes, su kuriomis funkcija virsta nuliu),



217 pav.

didėjimo ir mažėjimo intervalus, argumento reikšmes, su kuriomis funkcija įgyja didžiausias ir mažiausias reikšmes.

7.8.3. Funkcijos $y=\mathrm{tg}\,x$ grafikas (tangentoidė). Priminsime funkcijos $y=\mathrm{tg}\,x$ savybes.

1. Funkcijos apibrėžimo sritis: $x\in R$, išskyrus $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.
2. Funkcijos reikšmių sritis: $y\in(-\infty, +\infty)$.
3. Funkcija periodinė. Jos pagrindinis periodas π.
4. Funkcija nelyginė, nes $\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}\,x$.

Funkcija $y=\mathrm{tg}\,x$ yra periodinė ir nelyginė, todėl užtenka nubraižyti grafiką imant x iš intervalo $[0, \pi/2)$.

Sudarome funkcijos $y=\mathrm{tg}\,x$ reikšmių intervale $[0, \pi/2)$ lentelę.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	$\pi/2$
$y=\mathrm{tg}\,x$	0	0,20	0,42	0,68	1,03	1,56	2,57	5,80	—

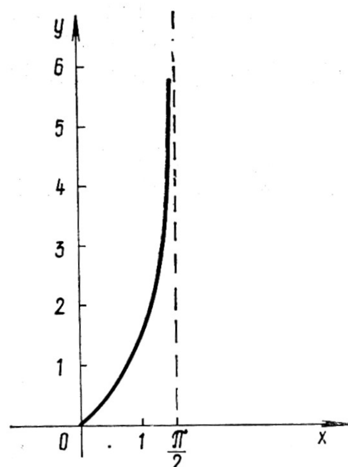
Koordinačių plokštumoje pažymime taškus ir juos sujungiame (218 pav.).

Funkcijos $y=\mathrm{tg}\,x$ grafiką imant x iš intervalo $[0, \pi/2)$ galima gauti geometriškai, pasinaudojus tangentų ašimi. Siūlome tai atlikti patiems.

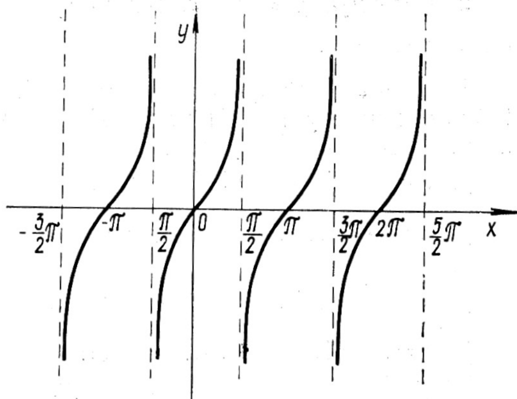
219 paveiksle nubrėžta tangentoidė, kai $x\in R$, $x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Funkcijos $y=\mathrm{ctg}\,x$ grafiką (kotangentoidę) siūlome nubraižyti savarankiškai.

7.8.4. Funkcijos $y=a\sin(\omega x+\varphi)$ grafikas. Šios funkcijos grafikas dažnai nagrinėjamas techninėse disciplinose. Jis gaunamas iš pagrindinės sinusoidės ($y=\sin x$ grafiko), ją atitinkamai transformavus.



218 pav.



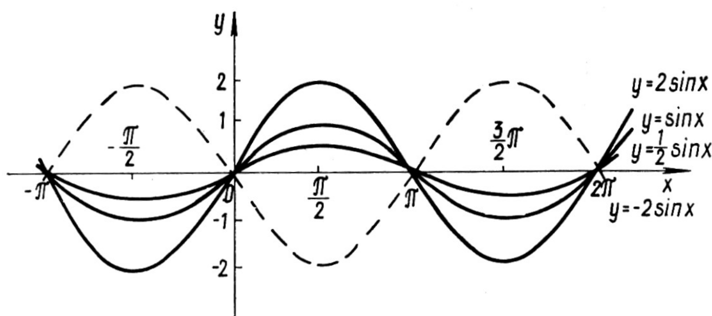
219 pav.

Nagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. Funkcija $y=a\sin x$. Nubrėšime šios funkcijos grafiką, kai $a=2$, $a=\frac{1}{2}$ ir $a=-2$.

Kai $a=2$, tai $y=2\sin x$. Šios funkcijos grafiko bet kurio taško ordinatė yra 2 kartus didesnė už sinusoidės $y=\sin x$ taško, turinčio tą pačią abscisę, ordinatę (220 pav.).

Kai $a=\frac{1}{2}$, tai $y=\frac{1}{2}\sin x$. Funkcijos grafiko bet kurio taško ordinatė yra 2 kartus mažesnė už sinusoidės $y=\sin x$ taško, turinčio tą pačią abscisę, ordinatę (220 pav.).



220 pav.

Kai $a=-2$, tai $y=-2\sin x$. Šios funkcijos grafikas simetriškas funkcijos $y=2\sin x$ grafikui ašies Ox atžvilgiu (220 pav.).

Taigi funkcijos $y=a\sin x$ grafikas yra sinusoidė, ištempta ($|a|>1$) arba suspausta ($|a|<1$) ašies Oy kryptimi santykiu $a:1$.

2. Funkcija $y=\sin \omega x$. Nubraižysime šios funkcijos grafiką, kai $\omega=2$ ir $\omega=\frac{1}{2}$.

Kai $\omega=2$, funkcija yra $y=\sin 2x$. Šios funkcijos grafiko bet kurio taško ordinatė yra tokia pati, kaip sinusoidės $y=\sin x$ taško, turinčio dvigubą abscisę. Pavyzdžiui,

jei $x=0$, tai $y=\sin 2\cdot 0=\sin 0$;

jei $x=\frac{\pi}{4}$, tai $y=\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}$;

jei $x=\frac{\pi}{2}$, tai $y=\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}=\sin\pi$;

jei $x=\pi$, tai $y=\sin 2\cdot\pi=\sin 2\pi$.

Taigi šios funkcijos grafikas yra sinusoidė, suspausta ašies Ox kryptimi du kartus (221 pav.).

Kai $\omega=\frac{1}{2}$, funkcija yra $y=\sin\frac{1}{2}x$. Šios funkcijos grafiko bet kurio taško ordinatė yra tokia pati kaip sinusoidės $y=\sin x$ taško, turinčio du kartus mažesnę abscisę. Pavyzdžiui,

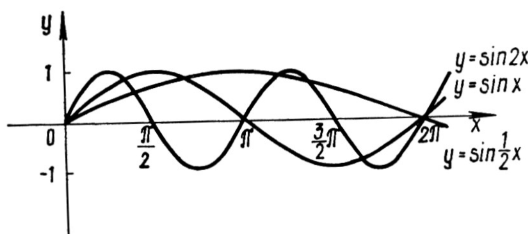
jei $x=0$, tai $y=\sin\frac{1}{2}\cdot 0=\sin 0$;

jei $x=\frac{\pi}{2}$, tai $y=\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$;

jei $x=\pi$, tai $y=\sin\frac{1}{2}\cdot\pi=\sin\frac{\pi}{2}$;

jei $x=2\pi$, tai $y=\sin\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\sin\pi$.

Taigi šios funkcijos grafikas yra sinusoidė, ištempta ašies Ox kryptimi du kartus (221 pav.).



221 pav.

Apskritai funkcijos $y=\sin\omega x$ grafikas yra sinusoidė, suspausta ($\omega>1$) arba ištempta ($\omega<1$) ašies Ox kryptimi santykiu $1:\omega$.

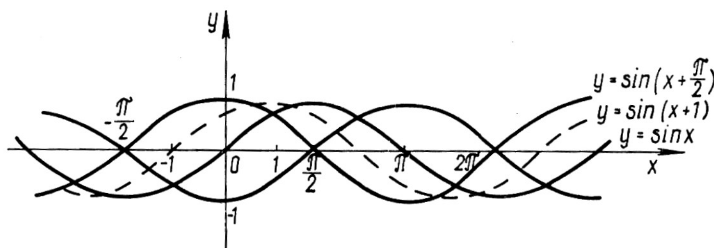
P a s t a b a. Funkcijos $y=\sin\omega x$ periodas yra $\frac{2\pi}{\omega}$.

Pavyzdžiui, funkcijos $y=\sin 2x$ periodas yra π, funkcijos $y=\sin\frac{1}{2}x$ periodas — 4π.

3. Funkcija $y=\sin(x+\varphi)$. Nubraižysime šios funkcijos grafiką, kai $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, $\varphi=1$.

Kai $\varphi=\frac{\pi}{2}$, funkcija yra $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Kiekvieno šios funkcijos grafiko taško, kurio abscisė yra x, ordinatė tokia pati, kaip funkcijos $y=\sin x$ grafiko taško, kurio abscisė yra $x+\frac{\pi}{2}$. Todėl funkcijos $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ grafikas yra sinusoidė, pastumta į kairę atstumu $\frac{\pi}{2}$ (222 pav.).

Kai $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, funkcija yra $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Jos grafikas yra sinusoidė, pastumta į dešinę atstumu $\frac{\pi}{2}$.



222 pav.

Vadinasi, funkcijos $y=\sin(x+\varphi)$ grafikas yra sinusoidė, pastumta į kairę atstumu φ, jei $\varphi>0$, ir į dešinę atstumu φ, jei $\varphi<0$.

4. Funkcija $y=a\sin(\omega x+\varphi)$. Pertvarkę funkcijos argumentą, gauname

$$y=a\sin\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right).$$

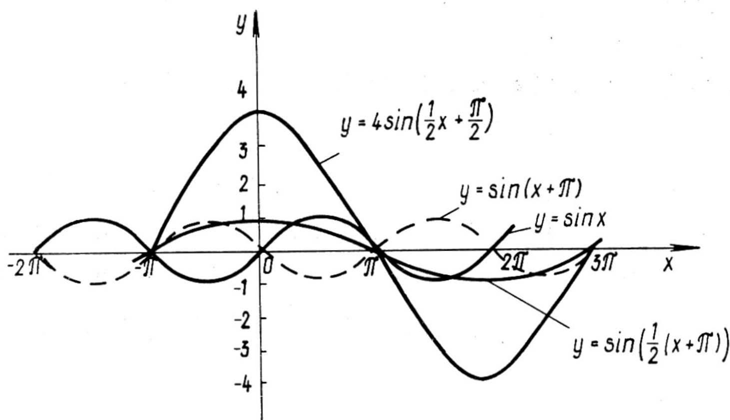
Šios funkcijos grafikas gaunamas iš funkcijos $y=\sin x$ grafiko:

1) pastūmus jį atstumu $\frac{\varphi}{\omega}$ į kairę, jei $\frac{\varphi}{\omega}>0$, arba į dešinę, jei $\frac{\varphi}{\omega}<0$;

2) jį ištempus ($\omega<1$) arba suspaudus ($\omega>1$) ašies Ox kryptimi;

3) jį ištempus ($a>1$) arba suspaudus ($a<1$) ašies Oy kryptimi.

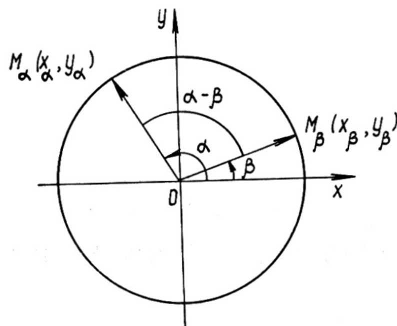
223 paveiksle nubraižytas funkcijos $y=4\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$ grafikas. Pertvarkius funkcijos argumentą, gauta $y=4\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$.



223 pav.

7.9. Dviejų argumentų sumos ir skirtumo trigonometrinės funkcijos

7.9.1. Dviejų argumentų skirtumo ir sumos kosinusas. Imkime du realiuosius skaičius α ir β. Skaičių α atitinka vienetinio apskritimo taškas $M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$, o skaičių β — $M_\beta(x_\beta, y_\beta)$ (224 pav.). Nubrėž-



224 pav.

kime vektorius $\overrightarrow{OM_\alpha}$ ir $\overrightarrow{OM_\beta}$. Užrašykime tų vektorių skaliarinę sandaugą:

$$\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = |\overrightarrow{OM_\alpha}|\,|\overrightarrow{OM_\beta}|\cos(\alpha-\beta).$$

Kadangi $|\overrightarrow{OM_\alpha}| = |\overrightarrow{OM_\beta}| = 1$, tai $\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = \cos(\alpha-\beta)$. (1)

Išreiškę skaliarinę sandaugą koordinatėmis, gauname

$$\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = x_\alpha \cdot x_\beta + y_\alpha \cdot y_\beta.$$

Kadangi $x_\alpha = \cos\alpha$, $y^\alpha = \sin\alpha$ ir $x_\beta = \cos\beta$, $y_\beta = \sin\beta$, tai

$$\overrightarrow{OM_\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_\beta} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Sulyginę (1) ir (2) lygybių dešiniąsias puses, gauname

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (3)$$

Parašę sumą $\alpha+\beta$ skirtumo $\alpha-(-\beta)$ pavidalu ir pasinaudoję (3) formule, turime

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

Bet $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, todėl

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (4)$$

7.9.2. Dviejų argumentų sumos ir skirtumo sinusas. Remdamiesi redukcijos taisyklėmis ir (3) formule, gauname:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Taigi

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (5)$$

Dviejų argumentų skirtumo sinusą apskaičiuojame šitaip:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Taigi

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (6)$$

7.9.3. Dviejų argumentų sumos ir skirtumo tangentas. Dviejų argumentų sumos tangentą išreiškiame sinusu ir kosinusu, po to naudojamės (4) ir (5) formulėmis:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Skaitiklį ir vardiklį padaliję iš $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, gauname

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.} \qquad (7)$$

Panašiai randame

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.} \qquad (8)$$

P a s t a b a. Veiksmai, kurie buvo atlikti gaunant (7) ir (8) formules, yra teisingi, kai $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$, t. y. jei $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

(3) ir (8) formulės vadinamos *sudėties formulėmis.*

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime sin 15°, nesinaudodami nei keturženklėmis matematinėmis lentelėmis, nei skaičiuotuvu.

$$\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

2. Apskaičiuokime $\cos(\alpha-\beta)$, jei $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}$, o α ir β yra antrajame ketvirtyje.

Užrašome dviejų argumentų skirtumo kosinusą:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (3)$$

Šioje formulėje nežinomas $\cos\alpha$ ir $\sin\beta$ reikšmes rasime pasinaudoję sinuso ir kosinuso sąryšio formule: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Iš čia

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Pagal sąlygą α yra antrajame ketvirtyje, todėl $\cos\alpha<0$. Taigi

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{9/25}=-3/5.$$

Panašiai

$$\sin\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta}.$$

Antrajame ketvirtyje $\sin\beta>0$. Taigi

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(-\frac{15}{17}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\sqrt{64/289}=8/17.$$

Įrašę rastąsias $\cos\alpha$ ir $\sin\beta$ reikšmes į (1) formulę, apskaičiuojame:

$$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}\left(-\frac{15}{17}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{45}{85}+\frac{32}{85}=\frac{77}{85}.$$

3. Suprastinkime reiškinį

$$A=\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14}+\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}.$$

Reiškinio skaitiklyje yra dviejų argumentų sumos sinuso, o var-

diklyje — dviejų argumentų skirtumo kosinuso išraiškos, todėl

$$A=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{14}\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{14}}.$$

Skaitiklį pertvarkome remdamiesi redukcijos taisykle:

$$\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{14}.$$

Ats. $A=1$.

7.10. Dvigubo argumento trigonometrinės funkcijos

Remiantis sudėties formulėmis, gaunamos dvigubo argumento trigonometrinės funkcijos. Formulėse

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

β pakeitę α, gauname

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \quad (1)$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \quad (2)$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \quad (3)$$

(3) formulė yra apibrėžta, kai apibrėžtas $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{tg}2\alpha$, t. y. kai $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

(2) formulės dešiniąją pusę išreiškę tik sinusu arba kosinusu, gauname formules

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha, \quad (4)$$
$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1. \quad (5)$$

Iš (4) ir (5) formulių išplaukia

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad (6)$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \quad (7)$$

(6) ir (7) formulės vadinamos *laipsnio sumažinimo* formulėmis.

Remiantis dvigubo argumento trigonometrinių funkcijų formulėmis, bet kurio argumento trigonometrines funkcijas galima išreikšti dvigubai mažesnio argumento funkcijomis.

Pavyzdžiai.

1. $\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$;
2. $\sin 80^\circ=2\sin 40^\circ\cos 40^\circ$;
3. $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Remdamiesi lygybėmis $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ir $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\cos\frac{\alpha}{2}$, trigonometrines funkcijas $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ išreiškiame pusės argumento tangentu. Aišku, kad

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Dešinėje pusėje esančios trupmenos skaitiklį ir vardiklį padaliję iš $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, gauname

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.} \qquad (8)$$

Panašiai iš lygybės

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

gauname

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.} \qquad (9)$$

Padalįję panariui (8) ir (9) lygybes, turime

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.} \qquad (10)$$

Pavyzdžiai. 1. Supaprastinkime reiškinį

$$A=\frac{\cos 36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}.$$

Taikome dvigubo argumento kosinuso formulę:

$$A=\frac{\cos^2 18^\circ-\sin^2 18^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\cos 18^\circ.$$

2. Apskaičiuokime $\cos 2\alpha$ ir $\operatorname{tg} 2\alpha$, kai $\cos\alpha=0{,}78$ ir $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Naudosimės formule

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\cos 2\alpha=2\cdot 0{,}78^2-1=2\cdot 0{,}608-1\approx 0{,}22.$$

Žinome, kad

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Apskaičiuosime $\operatorname{tg}\alpha$ prieš tai radę $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}78^2}=$$

$$=\sqrt{1-0{,}608}\approx 0{,}626\ \left(\sin\alpha>0,\text{ nes }\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Tuomet $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}626}{0{,}78}\approx 0{,}803$ ir

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\cdot 0{,}803}{1-0{,}803^2}\approx 4{,}5.$$

3. Įrodykime tapatybę

$$\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos\alpha)}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Pasinaudoję (1) ir (7) formulėmis, gauname

$$\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)\,(1+\cos\alpha)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

7.11. Pusės argumento trigonometrinės funkcijos

Laipsnio sumažinimo formulėse

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

pakeitę α į $\frac{\alpha}{2}$, turime

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad (1)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Iš čia

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad (3)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (4)$$

Panariui padaliję (3) lygybę iš (4), gauname

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (5)$$

(3)—(5) formulėse pliuso arba minuso ženklą rašome atsižvelgę į $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ir $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ženklus. Juos nesunku nustatyti žinant ketvirtį, kuriam priklauso argumentas $\frac{\alpha}{2}$. (5) formulė apibrėžta, kai $\cos\alpha\neq-1$, t. y. kai $\alpha\neq\pi(2k+1)$, $k\in Z$.

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ galima išreikšti argumento α trigonometrinėmis funkcijomis nevartojant šaknies ženklo.

Užrašome lygybę

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginę vieną kartą iš $2\cos\frac{\alpha}{2}$, kitą kartą iš $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ir pasinaudoję (1) bei (2) formulėmis, gauname:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \text{kai}\ \alpha\neq\pi(2k+1),\ k\in Z,$$

ir

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \text{kai}\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z.$$

Taigi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (6)$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ir $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, kai $\cos\alpha=0,6$ ir $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0,6}{2}}=\sqrt{0,2}\approx 0,4,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+0,6}{2}}=\sqrt{0,8}\approx 0,9.$$

Pliuso ženklą rašome todėl, kad $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0,6}{1+0,6}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=0,5.$$

2. Suprastinkime reiškinį

$$A=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha.$$

Naudosimės (5) formule:

$$A=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}-\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

7.12. Vienavardžių trigonometrinių funkcijų sumos ir skirtumo keitimas sandauga

Užrašykime sudėties formules:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y, \quad (1)$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y, \quad (2)$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \quad (3)$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y. \quad (4)$$

Panariui sudėję ir atėmę (1) ir (2), taip pat (3) ir (4) lygybes, gauname:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y, \quad (5)$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y, \quad (6)$$

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y, \quad (7)$$

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y. \quad (8)$$

Pažymėkime

$$x+y=\alpha,\ x-y=\beta. \quad (9)$$

Išreiškiame x ir y dydžiais α ir β:

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad y=\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (10)$$

Įrašę (9) ir (10) išraiškas į (5)—(8) lygybes, gauname:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (11)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (12)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (13)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (14)$$

Norėdami pakeisti sandaugomis tangentų sumą bei skirtumą, pirmiausia tangentą pakeičiame sinuso ir kosinuso santykiu, po to atliekame veiksmus:

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \quad (15)$$

Panašiai gauname:

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\pm\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta\pm\alpha)}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}. \quad (16)$$

Kartais reikia atlikti ir atvirkščią užduotį — dviejų trigonometrinių funkcijų sandaugą pakeisti suma ar skirtumu. Iš (5)—(8) lygybių išplaukia:

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)), \quad (17)$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y)), \quad (18)$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)). \quad (19)$$

Pavyzdžiai. 1. Supaprastinkime reiškinį

$$A=\frac{\sin24^\circ+\sin6^\circ}{\cos24^\circ+\cos6^\circ}.$$

Remdamiesi (11) ir (13) formulėmis, gauname:

$$A=\frac{2\sin\frac{24^\circ+6^\circ}{2}\cos\frac{24^\circ-6^\circ}{2}}{2\cos\frac{24^\circ+6^\circ}{2}\cos\frac{24^\circ-6^\circ}{2}}=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\operatorname{tg}15^\circ.$$

2. Įrodykime tapatybę

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$$

Kairiosios pusės skaitiklyje ir vardiklyje grupuojame pirmąjį ir trečiąjį dėmenis, po to taikome (11) ir (13) formules:

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\sin5\alpha)+\sin3\alpha}{(\cos\alpha+\cos5\alpha)+\cos3\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+\sin3\alpha}{2\cos\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+\cos3\alpha}=\frac{2\sin3\alpha\cos2\alpha+\sin3\alpha}{2\cos3\alpha\cos2\alpha+\cos3\alpha}=$$

$$=\frac{\sin3\alpha(2\cos2\alpha+1)}{\cos3\alpha(2\cos2\alpha+1)}=\operatorname{tg}3\alpha.$$

7.13. Atvirkštinės trigonometrinės funkcijos

Atvirkštines funkcijas nagrinėjome 4.9 skyrelyje. Šiame skyrelyje nagrinėsime atvirkštines trigonometrines funkcijas.

7.13.1. Funkcija $y=\arcsin x$. Funkcija $y=\sin x$ intervale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ didėja ir yra tolydi, visas reikšmes įgyja iš intervalo $[-, 1]$. Taigi intervale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ji turi atvirkštinę, kuri vadinama *arksinusu* ir žymima arcsin (žr. 225 pav.).

Funkcija $y=\arcsin x$ yra intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ skaičius (kampas, lankas), kurio sinusas lygus x.

Funkcijos $y=\sin x$ ir atvirkštinės funkcijos $y=\arcsin x$ argumento ir funkcijos reikšmių intervalai pateikti lentelėje:

$y=\sin x$	$y=\arcsin x$
$x\in R$	$x\in[-1, 1]$
$y\in[-1, 1]$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Funkcijos $y=\arcsin x$ grafikas simetriškas funkcijos $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, grafikui tiesės $y=x$ atžvilgiu (225 pav.).

Funkcija $y=\arcsin x$ yra nelyginė:

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

Apskaičiuosime keletą funkcijos $y=\arcsin x$ reikšmių:

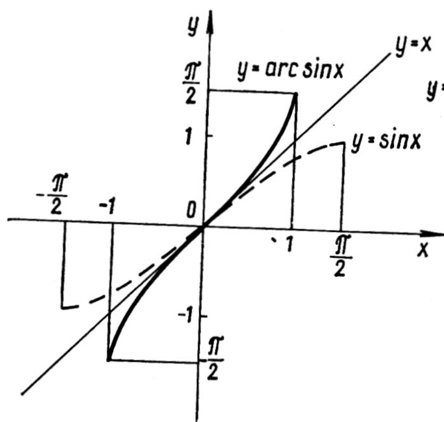
$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, nes $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$;

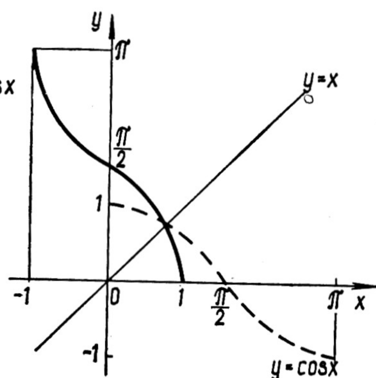
$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, nes $\sin\frac{\pi}{2}=1$;

$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$;

$\arcsin 0=0$, nes $\sin 0=0$.



225 pav.



226 pav.

7.13.2. Funkcija $y=\arccos x$. Funkcija $y=\cos x$ intervale $[0, \pi]$ mažėja ir yra tolydi, visas reikšmes įgyja iš intervalo $[-1, 1]$. Taigi intervale $[0, \pi]$ ji turi atvirkštinę, kuri vadinama *arkkosinusu* ir žymima arccos (žr. 226 pav.).

Funkcija $y=\arccos x$ yra intervalo $[0, \pi]$ skaičius (kampas, lankas), kurio kosinusas lygus x.

Funkcijos $y=\cos x$ ir atvirkštinės funkcijos $y=\arccos x$ argumento ir funkcijos reikšmių intervalai pateikti lentelėje:

$y=\cos x$	$y=\arccos x$
$x\in R$ $y\in[-1, 1]$	$x\in[-1, 1]$ $y\in[0, \pi]$

Funkcijos $y=\arccos x$ grafikas simetriškas funkcijos $y=\cos x$, $x\in$ $\in[0, \pi]$, grafikui tiesės $y=x$ atžvilgiu (226 pav.).

Įsidėmėkime, kad $\arccos x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, kai $x<0$.

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Apskaičiuosime keletą funkcijos $y = \arccos x$ reikšmių:

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, nes $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, nes $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, nes $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 180° - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 180° - 45° = 135°$,

nes $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\arccos 1 = 0$, nes $\cos 0 = 1$;

$\arccos(-1) = \pi$, nes $\cos \pi = -1$.

7.13.3. Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$. Funkcija $y = \operatorname{tg} x$ intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ didėja ir yra tolydi, visas reikšmes įgyja iš intervalo $(-\infty, \infty)$. Todėl intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ji turi atvirkštinę, kuri vadinama *arktangentu* ir žymima arctg.

Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ yra intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ skaičius (kampas, lankas), kurio tangentas lygus x.

$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$
$x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x \in R$
$y \in R$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ yra nelyginė:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Arktangento grafikas pavaizduotas 227 paveiksle.
Apskaičiuosime keletą arktangento reikšmių:

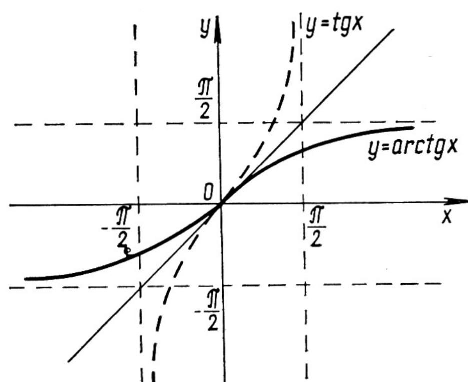
$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, nes $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$;

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, nes $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$;

$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, nes $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$, nes $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$;

$\operatorname{arctg} 2{,}8\approx 70°$, nes $\operatorname{tg} 70°\approx 2{,}8$.



227 pav.

7.13.4. Funkcija $y=\operatorname{arcctg} x$. Funkcija $y=\operatorname{ctg} x$ turi atvirkštinę funkciją intervale $(0, \pi)$, kuri vadinama *arkkotangentu* ir žymima arcctg.

Funkcija $y=\operatorname{arcctg} x$ *yra intervalo* $(0, \pi)$ *skaičius (kampas, lankas), kurio kotangentas lygus x.*

$y=\operatorname{ctg} x$	$y=\operatorname{arcctg} x$
$x\in R,\ x\neq \pi k$ $y\in R$	$x\in R$ $y\in(0, \pi)$

Arkkotangento grafikas pavaizduotas 228 paveiksle.

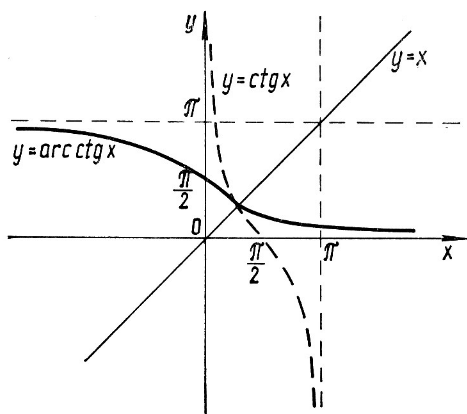
Kai argumento reikšmės neigiamos, arkkotangentas apskaičiuojamas šitaip:

$$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x.$$

Apskaičiuosime keletą arkkotangento reikšmių:

$\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$, nes $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$;

$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, nes $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$;



228 pav.

$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, nes $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$;

$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, nes $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1$.

7.14. Trigonometrinės lygtys

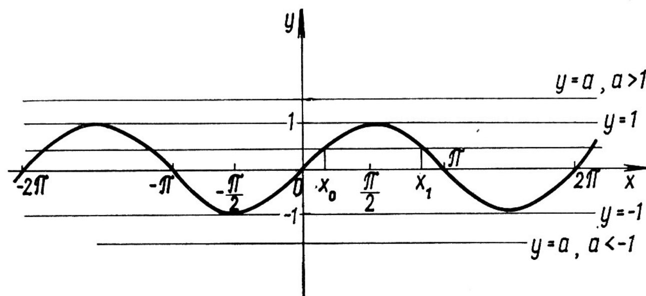
Lygtis, kuriose kintamasis yra po trigonometrinės funkcijos ženklu, vadiname trigonometrinėmis. Pavyzdžiui, $2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, $\sin^2 x - \sin x = 0$, $\cos 15x = \sin 5x$.

7.14.1. Paprasčiausios trigonometrinės lygtys. Lygtys $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ vadinamos paprasčiausiomis trigonometrinėmis lygtimis (a — realusis skaičius). Sprendžiant įvairias trigonometrines lygtis, jos tapačiai pertvarkomos į paprasčiausias. Todėl labai svarbu mokėti spręsti paprasčiausias trigonometrines lygtis.

Lygtis

$$\sin x = a \qquad (1)$$

turi sprendinių, kai $|a| \leqslant 1$ (229 pav.).



229 pav.

Kadangi sinuso periodas yra 2π, tai sprendžiant (1) lygtį, pakanka rasti visus sprendinius bet kurioje 2π ilgio atkarpoje. Vieną argumento reikšmę, su kuria $\sin x = a$, galime paimti iš intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ji užrašoma šitaip:

$$x_0 = \arcsin a. \tag{2}$$

Šią reikšmę vadinsime pagrindine. Kitas sprendinys bus

$$x_1 = \pi - x_0$$

(žr. 229 pav.).

Norint užrašyti visus (1) lygties sprendinius, reikia remtis sinuso periodiškumu, t. y. prie gautųjų sprendinių pridėti skaičių $2\pi k$, $k \in Z$.

Taigi lygtis $\sin x = a$ ($|a| \leqslant 1$) turi dvi sprendinių aibes:

$$x = x_0 + 2\pi k, \quad k \in Z, \tag{3}$$

ir

$$x = \pi - x_0 + 2\pi k = -x_0 + \pi(2k+1), \quad k \in Z. \tag{4}$$

(3) ir (4) formules galime užrašyti viena lygybe:

$$x = (-1)^k x_0 + \pi k, \quad k \in Z. \tag{5}$$

Vietoje x_0 įrašę $x_0 = \arcsin a$, visus sprendinius užrašome šitaip:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z. \tag{6}$$

Jeigu lygtyje $\sin x = a$ turime $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$, tai sprendinius užrašome paprasčiau (tai aiškiai matyti iš funkcijos $y = \sin x$ grafiko 229 pav.):

jei $\sin x = 0$, tai $x = \pi k$, $k \in Z$;

jei $\sin x = 1$, tai $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

jei $\sin x = -1$, tai $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. (6a)

Pavyzdžiai. Išspręskime lygtis.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Užrašome sprendinius:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

2. $\sin 2x = 0{,}64$.

Pagal (6) formulę randame:

$$2x = (-1)^k \arcsin 0{,}64 + \pi k \approx (-1)^k\, 39{,}8° + 180° k.$$

Iš čia:

$$x \approx (-1)^k\, 19{,}9° + 90° k, \quad k \in Z.$$

3. $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k(-60°) + 180° k.$$

Todėl

$$x=(-1)^k(-20°)+60°k.$$

4. $\frac{1}{2}\sin x=1.$

Padauginę abi puses iš 2, gauname

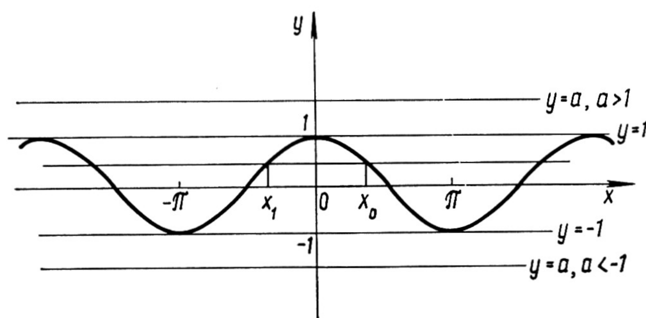
$$\sin x=2;$$

čia $a>1$, todėl lygtis sprendinių neturi.

Lygtis

$$\cos x=a \qquad (7)$$

turi sprendinių, kai $|a|\leqslant 1$ (230 pav.).



230 pav.

Kadangi kosinuso periodas yra 2π, tai sprendžiant (7) lygtį pakanka rasti visus sprendinius bet kurioje 2π ilgio atkarpoje.

Vieną argumento reikšmę, su kuria $\cos x=a$, galime paimti iš intervalo $[0, \pi]$. Ji užrašoma šitaip:

$$x_0=\arccos a. \qquad (8)$$

Šią reikšmę vadinsime pagrindine. Kitas sprendinys bus $x_1=-x_0$ (žr. 230 pav.).

Norint užrašyti visus (7) lygties sprendinius, reikia remtis kosinuso periodiškumu, t. y. prie gautųjų sprendinių pridėti skaičių $2\pi k$, $k\in Z$.

Taigi lygtis $\cos x=a$ ($|a|\leqslant 1$) turi dvi sprendinių aibes:

$$x=x_0+2\pi k, \quad k\in Z,$$

ir

$$x=-x_0+2\pi k, \quad k\in Z.$$

Sujungę abi formules į vieną, gauname

$$x=\pm x_0+2\pi k.$$

Vietoje x_0 įrašę $\arccos a$, visus sprendinius išreiškiame šitaip:

$$x=\pm\arccos a+2\pi k, \quad k\in Z. \qquad (9)$$

Jeigu lygtyje $\cos x = a$ turime $a=0$, $a=1$, $a=-1$, tai sprendinius užrašome paprasčiau:

jei $\cos x = 0$, tai $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

jei $\cos x = 1$, tai $x = 2\pi k$, $k \in Z$;

jei $\cos x = -1$, tai $x = \pi(2k+1)$, $k \in Z$. (9a)

Pavyzdžiai. Išspręsime lygtis.

1. $\cos x = \frac{1}{2}$.

Pasinaudoję (9) formule, lygties sprendinius užrašome šitaip:

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

2. $\cos 3x = 0{,}588$.

Randame:

$$3x = \pm \arccos 0{,}588 + 2\pi k,$$

$$3x \approx \pm 54° + 360°k.$$

Iš čia

$$x \approx \pm 18° + 120°k, \quad k \in Z.$$

3. $\cos(x - 20°) = 1$.

$$x - 20° = 360°k,$$

$$x = 20° + 360°k, \quad k \in Z.$$

4. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$2x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k,$$

$$2x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k, \; k \in Z.$$

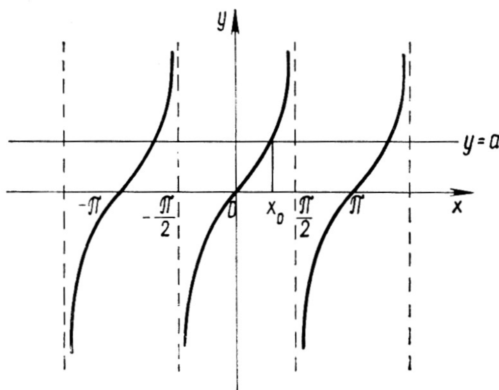
Lygtis

$$\operatorname{tg} x = a \quad (10)$$

turi sprendinių su visomis $a \in R$ reikšmėmis (231 pav.). Pagrindinis šios lygties sprendinys yra skaičius iš intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: $x_0 = \operatorname{arctg} a$. Visos ieškomosios argumento reikšmės gaunamos prie šio sprendinio pridėjus bet kurį sveikąjį skaičių tangento periodų π.

Taigi lygties $\operatorname{tg} x = a$ $(a \in R)$ sprendiniai užrašomi formule

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in Z. \quad (11)$$



231 pav.

Pavyzdžiai. Spręsime lygtis.

1. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Užrašome sprendinius:

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

2. $\operatorname{tg} 2x = -2{,}5$.

Randame:

$$2x = \operatorname{arctg}(-2{,}5) + 180°k,$$

$$2x \approx -68° + 180°k,$$

todėl

$$x \approx -34° + 90°k, \quad k \in Z.$$

Lygtis

$$\operatorname{ctg} x = a \tag{12}$$

turi sprendinių su visomis $a \in R$ reikšmėmis.

Pagrindinis šios lygties sprendinys yra skaičius iš intervalo $(0, \pi)$:

$$x_0 = \operatorname{arcctg} a.$$

Visi lygties $\operatorname{ctg} x = a$ sprendiniai užrašomi formule:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in Z. \tag{13}$$

Pavyzdžiai. Išspręsime lygtis.

1. $\operatorname{ctg} x = 1$.

Užrašome sprendinius:

$$x = \operatorname{arcctg} 1 + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$$

2. $\operatorname{ctg} 4x = -0{,}28$.

$$4x \approx 106° + 180°k,$$

$$x \approx 26{,}5° + 45°k, \quad k \in Z.$$

7.14.2. Trigonometrinių lygčių sprendimas keitimo būdu. Spręsdami šiuo būdu, įvairias trigonometrines funkcijas, įeinančias į lygtį, išreiškiame kuria nors viena iš jų. Tos funkcijos atžvilgiu gautą trigonometrinę lygtį tapačiai pertvarkome į algebrinę įvesdami naują kintamąjį.

Pavyzdžiai. 1. Išspręskime lygtį

$$\sin x+\cos^2 x=\frac{1}{4}.$$

Šioje lygtyje patogu $\cos^2 x$ pakeisti $1-\sin^2 x$:

$$\sin x+1-\sin^2 x-\frac{1}{4}=0.$$

Padauginę iš 4 ir sutraukę panašiuosius narius, gauname

$$4\sin^2 x-4\sin x-3=0.$$

Pažymime $\sin x=z$. Tuomet lygtis tampa šitokia:

$$4z^2-4z-3=0.$$

Išsprendę ją, randame $z_1=1\frac{1}{2}$ ir $z_2=-\frac{1}{2}$, t. y.

$$\sin x=1\frac{1}{2} \quad \text{ir} \quad \sin x=-\frac{1}{2}.$$

Kadangi $1\frac{1}{2}>1$, tai pirmoji lygtis sprendinių neturi. Todėl pradinė lygtis ekvivalenti lygčiai $\sin x=-\frac{1}{2}$. Pastarosios lygties sprendiniai yra

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, \qquad k\in Z.$$

2. Išspręskime lygtį

$$3\cos 2x=-7\cos x.$$

$\cos 2x$ pakeisime $\cos^2 x-\sin^2 x$:

$$3(\cos^2 x-\sin^2 x)=-7\cos x,$$

$$3\cos^2 x-3\sin^2 x+7\cos x=0.$$

Pakeitę $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, gauname

$$3\cos^2 x-3(1-\cos^2 x)+7\cos x=0,$$

arba

$$6\cos^2 x+7\cos x-3=0.$$

Pažymime $\cos x=u$ ir įrašome į lygtį:

$$6u^2+7u-3=0.$$

Išsprendę ją, randame $u_1 = -1\frac{1}{2}$ ir $u_2 = \frac{1}{3}$, t. y.

$$\cos x = -1\frac{1}{2} \text{ ir } \cos x = \frac{1}{3}.$$

Pirmoji lygtis sprendinių neturi, o antrosios lygties sprendiniai yra skaičiai

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k,$$

$$x \approx \pm 70{,}5° + 360° k, \quad k \in Z.$$

7.14.3. Trigonometrinių lygčių sprendimas skaidymo būdu. Trigonometrinės lygtys pertvarkomos į paprastesnes lygtis, kai jų dešinioji pusė yra nulis, o kairioji pusė išskaidoma dauginamaisiais.

Pavyzdžiai. 1. Išspręskime lygtį

$$(1 + \cos x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0.$$

Prilyginę kiekvieną dauginamąjį nuliui, gauname:

$$\left[\begin{array}{l} 1 + \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \\ \hline \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \frac{x}{2} = \pi k, \\ \hline \frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (2k+1)\pi, \\ x = 2\pi k, \\ \hline x \neq (2k+1)\pi. \end{array}\right.$$

Ats. Pradinės lygties sprendiniai yra skaičiai $x = 2\pi k$.

2. Rasime lygties

$$4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$$

sprendinius.

Lygties kairiąją pusę išskaidome dauginamaisiais:

$$4\sin^2 x(\sin x + 1) - 3(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(4\sin^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0, \\ 4\sin^2 x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin^2 x = \frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k. \end{array}\right.$$

Ats. $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z\right\}$.

3. $\sin 7x-\cos 4x=\sin x$.

Visus narius perkelsime į kairiąją pusę, sugrupuosime po dvi vienavardes trigonometrines funkcijas, jų skirtumą pakeisime sandauga ir išskaidysime:

$$(\sin 7x-\sin x)-\cos 4x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 4x-\cos 4x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0,\\ 2\sin 3x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ \sin 3x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k,\\ x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k,\qquad k\in Z.\end{array}\right.$$

Ats. $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k,\quad (-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k,\quad k\in Z\right\}$.

7.14.4. Lygčių, homogeninių $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu, sprendimas. Lygtis vadinama *homogenine* $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu, kai kiekvieno lygties nario šių funkcijų laipsnių rodiklių suma yra ta pati. Pavyzdžiui,

$$a\sin x+b\cos x=0,$$

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0,$$

$$a\sin^3 x+b\sin^2 x\cos x+c\sin x\cos^2 x+d\cos^3 x=0.$$

Nagrinėsime atvejį, kai $a\neq 0$. Padaliję pirmąją lygtį iš $\cos x$, antrąją iš $\cos^2 x$, o trečiąją iš $\cos^3 x$, gauname lygtis $\operatorname{tg} x$ atžvilgiu:

$$a\operatorname{tg} x+b=0,$$

$$a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+c=0,$$

$$a\operatorname{tg}^3 x+b\operatorname{tg}^2 x+c\operatorname{tg} x+d=0.$$

Jos sprendžiamos pažymėjus $\operatorname{tg} x=z$.

Nesunku pastebėti, kad, kai $a\neq 0$, homogeninių lygčių netenkina tos x reikšmės, su kuriomis $\cos x=0$. Todėl dalydami iš $\cos x$, $\cos^2 x$ arba $\cos^3 x$ abi homogeninės lygties puses, kai $a\neq 0$, šaknų neprarandame.

Pavyzdžiai. Spręsime homogenines lygtis.

1. $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

Abi lygties puses padaliję iš $\cos^2 x$, gauname

$$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-3=0.$$

Išsprendę šią lygtį, randame

$$\operatorname{tg} x=-3\quad \text{ir}\quad \operatorname{tg} x=1.$$

Pastarųjų lygčių sprendiniai yra

$$x \approx -71{,}6^\circ + 180^\circ k \quad \text{ir} \quad x = 45^\circ + 180^\circ k.$$

2. $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$

Ši lygtis nėra homogeninė, bet padauginę jos dešiniąją pusę iš trigonometrinio vieneto: $\sin^2 x + \cos^2 x$ ir visus narius perkėlę į kairiąją, gauname:

$$6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Padalinę abi lygties puses iš $\cos^2 x$, turime

$$4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname paprasčiausias trigonometrines lygtis $\operatorname{tg} x = 0{,}75$ ir $\operatorname{tg} x = -1$, kurių sprendiniai yra

$$x \approx 36{,}9^\circ + 180^\circ k \quad \text{ir} \quad x = -45^\circ + 180^\circ k.$$

7.14.5. Lygties $a \sin x + b \cos x = c$ sprendimas. Sprendžiant šią lygtį, $\sin x$ ir $\cos x$ keičiami pusės argumento tangentu pagal šias formules:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$4 \sin x + 3 \cos x = 2.$$

$\sin x$ ir $\cos x$ keičiame pusės argumento tangentu:

$$4 \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 = 0,$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 0,$$

$$\frac{-5 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 0,$$

$$\begin{cases} 5 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Išsprendę kvadratinę lygtį $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ atžvilgiu, gauname

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1{,}72 \text{ ir } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-0{,}12.$$

Iš šių lygčių randame

$$x\approx 119{,}6°+360°k \text{ ir } x\approx -13{,}6°+360°k, \quad k\in Z.$$

7.14.6. Įvairių trigonometrinių lygčių sprendimas. Sprendžiant trigonometrines lygtis, gali tekti naudotis ir redukcijos, sudėties bei kitomis formulėmis.

Pavyzdžiai. 1. Išspręskime lygtį

$$5\sin(180°-x)+3\cos(90°+x)-4\cos(270°-x)=2.$$

Pasinaudoję redukcijos formulėmis, gauname:

$$5\sin x-3\sin x+4\sin x=2,$$

$$6\sin x=2,$$

$$\sin x=\frac{1}{3},$$

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,$$

$$x\approx(-1)^k 19{,}5°+180°k, \quad k\in Z.$$

2. $\sin(x+30°)+\cos(x+60°)=2\cos^2 x.$

Naudosimės sudėties formulėmis:

$$\sin x\cos 30°+\sin 30°\cos x+\cos x\cos 60°-\sin x\sin 60°=$$
$$=2\cos^2 x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\cos^2 x,$$

$$\cos x-2\cos^2 x=0,$$

$$\cos x(1-2\cos x)=0,$$

$$\cos x=0 \text{ arba } 1-2\cos x=0.$$

Šių lygčių sprendiniai yra

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \text{ ir } x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in Z.$$

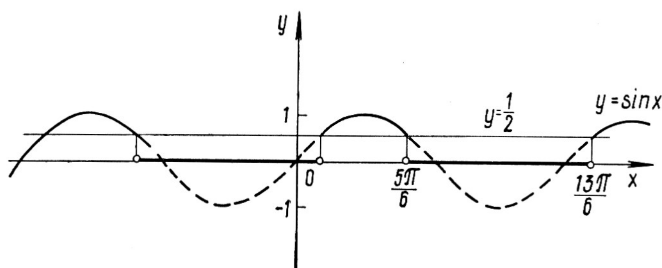
7.15. Paprasčiausios trigonometrinės nelygybės

Lygtyse $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$ lygybės ženklą pakeitę nelygybės ženklu ($>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$), gauname paprasčiausias trigonometrines nelygybes.

Spręsdami šias nelygybes, naudosimės trigonometrinių funkcijų grafikais.

Pavyzdžiai. 1. Išspręskime nelygybę $\sin x < \frac{1}{2}$.

Nubraižykime funkcijų $y=\sin x$ ir $y=\frac{1}{2}$ grafikus (232 pav.).



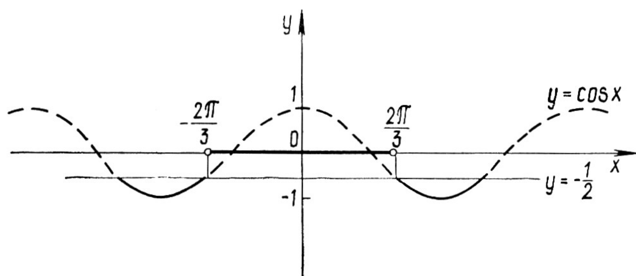
232 pav.

Nelygybės sprendiniai — tai ašies Ox taškai tuose intervaluose, kuriuose sinusoidė yra žemiau tiesės $y=\frac{1}{2}$. Paveiksle paryškintas argumento reikšmių, tenkinančių sprendžiamąją nelygybę, intervalas $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$. Tokių intervalų bus be galo daug. Juos užrašysime remdamiesi sinuso periodiškumu:

$$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \ \frac{13\pi}{6}+2\pi k\right), \qquad k\in Z.$$

2. Išspręskime nelygybę $\cos x > -\frac{1}{2}$.

Nubraižome funkcijos $y=\cos x$ ir tiesės $y=-\frac{1}{2}$ grafikus (233 pav.). Duotosios nelygybės sprendiniai — tai ašies Ox taškai tuose



233 pav.

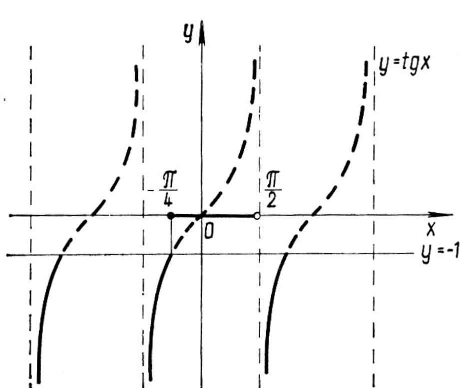
intervaluose, kuriuose sinusoidė yra virš tiesės $y=-\frac{1}{2}$. Paveiksle paryškintas argumento reikšmių, tenkinančių tą nelygybę, intervalas $\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Remdamiesi kosinuso periodiškumu, užrašysime visus pateiktosios nelygybės sprendinius:

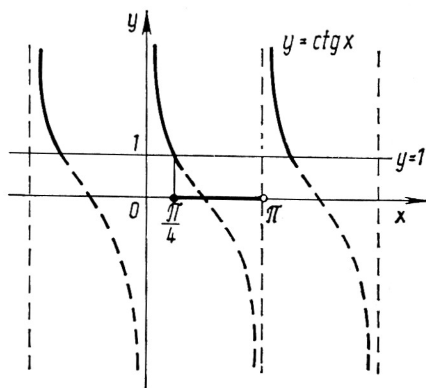
$$\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\qquad k\in Z.$$

3. Išspręskime nelygybę $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

Nubraižome funkcijos $y=\operatorname{tg} x$ ir tiesės $y=-1$ grafikus (234 pav.). Pateiktosios nelygybės sprendiniai — tai ašies Ox taškai tuose inter-



234 pav.



235 pav.

valuose, kuriuose tangentoidė yra virš tiesės $y=-1$. Paveiksle paryškintas argumento reikšmių, tenkinančių tą nelygybę, intervalas $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Remdamiesi tangento periodiškumu, užrašysime visus duotosios nelygybės sprendinius:

$$\left[\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\qquad k\in Z.$$

4. Išspręskime nelygybę $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$.

Nubraižome funkcijos $y=\operatorname{ctg} x$ ir tiesės $y=1$ grafikus (235 pav.). Nelygybės sprendiniai — tai ašies Ox taškai tuose intervaluose, kuriuose kotangentoidė yra žemiau tiesės $y=1$. Paveiksle paryškintas argumento reikšmių, tenkinančių tą nelygybę, intervalas $\left[\frac{\pi}{4},\ \pi\right)$.

Remdamiesi kotangento periodiškumu, užrašysime visus duotosios nelygybės sprendinius:

$$\left[\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad \pi+\pi k\right),\qquad k\in Z.$$

7.16. Pratimai

1. Nubrėžkite vektorių, kai kampas, kurį jis sudaro su teigiamąja ašies Ox kryptimi, lygus: 1) $-45°$, 2) $135°$, 3) $-270°$, 4) $450°$, 5) $810°$, 6) 2, 7) -3, 8) -7.

2. Išreikškite radianais (skaičiuotuvu): 1) $49°$, 2) $156°$, 3) $315°$, 4) $573°$, 5) $73°20'$, 6) $86°10'$, 7) $195°17'$ 8) $297°54'$.

3. Išreikškite laipsniais (skaičiuotuvu): 1) 0,94, 2) 3,85, 3) 4,25, 4) 7,39, 5) 13,7, 6) $\frac{\pi}{9}$, 7) $\frac{\pi}{10}$, 8) $\frac{\pi}{18}$.

4. Du trikampio kampai yra $49°$ ir $57°$ didumo. Apskaičiuokite trečiojo kampo didumą radianais.

5. Du trikampio kampai yra $\frac{4\pi}{15}$ ir $\frac{3\pi}{10}$ radianų didumo. Raskite trečiojo kampo didumą laipsniais.

6. Trikampio kampų didumų santykis $1:4:7$. Apskaičiuokite kampų didumą laipsniais ir radianais.

7. Apskritimo lankas sudaro: 1) $1/5$, 2) $5/6$, 3) 0,03, 4) 0,275, 5) 1,95 apskritimo. Raskite lankų didumą radianais.

8. Išreikškite taisyklingojo trikampio, keturkampio, penkiakampio, šešiakampio, dešimtkampio ir bet kokio n-kampio kampų didumus radianais.

9. Jūrų kompaso apskritimas padalytas į 32 dalis, vadinamas rumbais. Išreikškite rumbo didumą radianais ir laipsniais.

10. Išreikškite radianais pasisukimo kampą krumpliaračio, turinčio 90 krumplių, kai jis pasisuka per: 1) 30 krumplių, 2) 100 krumplių, 3) 250 krumplių.

11. Apskaičiuokite kampinį greitį disko, atliekančio 300 apsisukimų per minutę.

P a s t a b a. Kampiniu greičiu vadinamas kampas, kuriuo pasisuka per vieną sekundę tolygiai besisukančio kietojo kūno bet kurio taško spindulys. Kampinis greitis matuojamas radianais per sekundę (rad/s).

12. Veleno kampinis greitis 53,2 rad/s. Apskaičiuokite veleno apsisukimų per minutę skaičių.

13. Apskaičiuokite valandinės ir minutinės rodyklių kampinį greitį.

14. Užrašykite $\alpha=\alpha_0+2\pi k$, $k\in Z$, $\alpha_0\in(-2\pi, 2\pi)$, pavidalu šiuos skaičius: 1) 7, 2) 10, 3) 25, 4) 43,7, 5) $-13{,}6$, 6) $-50{,}8$.

15. Kokius skaičius atitinka vienetinio apskritimo taškai M_1, $M_{\pi/4}$, $M_{\pi/2}$, M_7.

16. Kokios vienetinio apskritimo taškų M_0, $M_{\pi/6}$, $M_{\pi/2}$, M_{π}, $M_{3\pi/2}$, $M_{2\pi}$ koordinatės?

17. Pažymėkite (apytiksliai) vienetiniame apskritime skaičius 3, 5, 10, -2, -5, -15. Kuriuose ketvirčiuose yra tie skaičiai? Kokios atkarpos yra tų skaičių sinusai? Nubrėžkite jas.

18. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

1) $y=\sin 5x$; 2) $y=\frac{2}{\sin x}$;

3) $y=\operatorname{tg} 2x$; 4) $y=\cos\frac{x}{5}$;

5) $y=\frac{1}{1+\cos x}$; 6) $y=2\sin x+\cos x$;

7) $y=3\cos x+\operatorname{tg} x$; 8) $y=\frac{5+\sin x}{\cos x}$;

9) $y=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; 10) $y=\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}$.

19. Apskaičiuokite leistinąsias argumento reikšmes šių funkcijų:

1) $y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$; 2) $y=\sin x+\operatorname{tg} 3x$;

3) $y=\frac{3}{1-\cos x}$; 4) $y=\frac{2}{1-\operatorname{ctg} x}$;

5) $y=\operatorname{ctg}(3x-45°)$; 6) $y=\operatorname{tg}\frac{(x-1)^2}{2}$.

20. Ar teisingos šios lygybės:

1) $\sin x=\frac{5}{6}$; 2) $\cos x=\frac{8}{7}$; 3) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

4) $\cos x=\frac{\sqrt{7}}{3}$; 5) $\sin x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$;

6) $\cos x=a+\frac{1}{a}$, kai $a\neq 0$; 7) $\sin x=\frac{a-b}{a+b}$, kai $a>0$, $b>0$?

21. Nustatykite šių reiškinių ženklus:

1) $\sin 245° \cos 130° \operatorname{tg} 142°$;

2) $\cos 320° \operatorname{tg} 250° \operatorname{ctg} 113°$;

3) $\cos 5 \cos 7 \cos 8$;

4) $\frac{\sin 7 \cos(-8)}{\operatorname{tg} 6 \operatorname{ctg}(-5)}$.

22. Su kuriomis argumento reikšmėmis šių funkcijų reikšmės yra mažiausios ir didžiausios:

1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\cos\frac{x}{2}$;

3) $y=5\sin 2x$; 4) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$.

23. Su kuriomis argumento reikšmėmis šios funkcijos įgyja nulinę reikšmę:

1) $y=\sin\frac{x}{3}$; 2) $y=\cos 4x$;

3) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$; 4) $y=\operatorname{ctg} 3x$.

24. Raskite šių funkcijų reikšmių aibę:

1) $y=\sin|2x|$; 2) $y=|\sin 3x|$;

3) $y=|\cos x|$; 4) $y=|\operatorname{tg} x|$.

25. Apskaičiuokite:

1) $5\sin 90°+2\cos 0°-3\sin 270°+10\cos 180°$;

2) $\sin\frac{3}{2}\pi+2\cos 2\pi-\operatorname{tg}\pi$;

3) $a\sin 0+b\cos\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

4) $a^2\sin\frac{\pi}{2}+2ab\cos\pi+\frac{b^2}{\cos^2 0}$;

5) $\dfrac{3\sin^2\frac{3}{2}\pi-5\cos^2\pi}{2\cos^2 2\pi+4\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}}$;   6) $\dfrac{4\sin^2\frac{\pi}{4}+3\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}}{6\cos^2\pi+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{3}}$;

7) $\dfrac{2\cos 270°-3\,\mathrm{tg}\,0°+4\sin 270°}{\cos 180°+3\sin 90°-\mathrm{tg}\,180°}$;

8) $\dfrac{5\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\pi+\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}}{3\cos 0+5\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}}$.

26. Suprastinkite reiškinius (mintinai):

1) $1-\sin^2\alpha$;   2) $\cos^2\alpha-1$;

3) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$;   4) $(1-\cos\alpha)(\cos\alpha+1)$;

5) $\sin^2\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;   6) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

27. 1) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\pi<\alpha<3\pi/2$. Apskaičiuokite $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

2) $\mathrm{tg}\,\alpha=-1$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Apskaičiuokite $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

3) $\cos\alpha=\frac{40}{41}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

4) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{7}{24}$, $\pi<\alpha<3\pi/2$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

5) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{8}{15}$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$;

6) $\sin\alpha=0{,}62$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Apskaičiuokite $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

7) $\cos\alpha=-0{,}23$, $\pi<\alpha<3\pi/2$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

8) $\mathrm{tg}\,\alpha=-2{,}1$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

9) $\mathrm{ctg}\,\alpha=2{,}2$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$.

28. Suprastinkite reiškinius:

1) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

2) $(\sin\gamma+\cos\gamma)^2+(\sin\gamma-\cos\gamma)^2$;

3) $\cos^2\alpha-(\mathrm{ctg}^2\alpha+1)\sin^2\alpha$;

4) $\sin^4\beta-\cos^4\beta+\cos^2\beta$;

5) $\sin\alpha\cos\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)$;

6) $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\mathrm{tg}\,\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\mathrm{tg}\,\alpha\right)$;

7) $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$.

29. Įrodykite, kad pateiktųjų reiškinių reikšmės nepriklauso nuo argumento β reikšmių:

1) $\frac{1+2\sin\beta\cos\beta}{(\sin\beta+\cos\beta)^2}$;　　2) $\frac{\sin^2\beta-\cos^2\beta+1}{\sin^2\beta}$;

3) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}$,　　4) $\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$.

30. Įrodykite tapatybes:

1) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

4) $(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

5) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$;

6) $\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha$;

7) $1-\frac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$;

8) $\frac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(\sin\alpha-1)}=2$;

9) $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

31. Suprastinkite reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę:

1) $\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$, kai $\cos\beta=0{,}8$;

2) $\frac{\cos z}{1+\sin z}+\operatorname{tg} z$, kai $\cos z=-0{,}25$;

3) $1-\sin x\cos x\operatorname{tg} x$, kai $\sin x=0{,}7$;

4) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha=2$.

32. Nustatykite, kurios iš pateiktųjų funkcijų yra lyginės ir kurios nelyginės:

1) $f(x)=1-\cos x$;　　2) $f(x)=1+\sin x$;

3) $g(x)=x-\sin x$;　　4) $g(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

5) $f(t)=5\sin t\cos t$;　　6) $F(x)=x-\cos x$;

7) $y(x)=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$;　　8) $y(\beta)=\sin^2\beta\operatorname{tg}\beta$.

33. Nustatykite šių funkcijų periodus: 1) $\sin 4x$, 2) $\cos\frac{2}{3}x$, 3) $\operatorname{tg} 5x$, 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, 5) $\sin\frac{1}{3}x$, 6) $\cos 3x$, 7) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, 8) $\operatorname{ctg} 2x$.

34. Apskaičiuokite pateiktuosius reiškinius, remdamiesi trigonometrinių funkcijų periodiškumu:

1) $\frac{\sin(-1110^\circ)\cos(-1500^\circ)}{\operatorname{tg}(-390^\circ)\operatorname{ctg}(-600^\circ)}$;

2) $\frac{\cos(-780^\circ)\operatorname{tg}(-585^\circ)}{\sin(-1140^\circ)\operatorname{ctg}(-210^\circ)}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}(3\pi-\frac{\pi}{3})\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{3}+4\pi)}{\sin\frac{25\pi}{4}\cos\frac{9\pi}{4}}$;

4) $\sin^2\left(-\frac{13\pi}{3}\right)\cos^2\left(-\frac{13\pi}{6}\right)-\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$.

35. Apskaičiuokite:

1) $5\sin 210^\circ\cos 300^\circ\operatorname{tg}135^\circ$;

2) $8\operatorname{ctg}315^\circ\sin(-210^\circ)\cos 225^\circ$;

3) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

4) $2\sin^2\frac{17\pi}{4}+\operatorname{tg}^2\frac{33\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$.

36. Supaprastinkite:

1) $\sin^2(270^\circ-x)+\sin^2(180^\circ-x)$;

2) $\sin(\pi-x)\cos(x-\frac{\pi}{2})-\sin(x+\frac{\pi}{2})\cos(\pi-x)$;

3) $\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(360^\circ+\alpha)$;

4) $\operatorname{tg}(\pi-a)+\operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{2}-a)+\sin(\frac{\pi}{2}+a)-\cos(a-\pi)$;

5) $\cos(360^\circ+x)\sin(270^\circ-x)-\sin(180^\circ+x)\cos(90^\circ+x)$.

6) $\sin(450^\circ-\alpha)-\sin(270^\circ-\alpha)-\sin(450^\circ-\alpha)+\sin(270^\circ+\alpha)$;

7) $\frac{\sin(\pi+a)\cos(2\pi-a)}{\operatorname{tg}(\pi-a)\cos(a-\pi)}$;

8) $\frac{\sin(a+2\pi)\sin(\pi+a)}{\operatorname{tg}(\pi+a)\cos(1{,}5\pi+a)}$.

37. Įrodykite tapatybes:

1) $\frac{\sin(270^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

2) $\frac{\sin(\pi-a)\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-a)\cos(2\pi-a)}{\operatorname{tg}(\pi+a)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+a)\sin(-a)}=\sin a$;

3) $\sin(\frac{3}{2}\pi+a)\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-a)+\sin(\pi-a)+\operatorname{ctg}(\frac{3}{2}\pi-a)=\operatorname{tg}a$;

4) $\mathrm{ctg}^2(360°-\alpha)-\sin(\alpha-90°)\dfrac{1}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

5) $\dfrac{\sin(2\pi-a)\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+a)\,\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2}-a)}{\cos(2\pi+a)\,\mathrm{tg}(\pi+a)}=1$;

6) $\dfrac{\sin(180°-\alpha)\sin(270°-\alpha)\,\mathrm{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\,\mathrm{tg}(270°+\alpha)\,\mathrm{tg}(360°-\alpha)}=-\cos\alpha$;

7) $\dfrac{\sin(\pi+a)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-a)}-\dfrac{\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2}+a)}{\mathrm{ctg}(\pi-a)}+\mathrm{tg}(\pi-a)+\cos 0=0$;

8) $\dfrac{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(-\alpha)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}=\sin\alpha$;

9) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin^2(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}+\dfrac{\mathrm{tg}^2(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\mathrm{ctg}^2(\pi+\alpha)}=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha-2\pi)}$;

38. Nubrėžkite grafikus šių funkcijų:

1) $y=|\sin x|$; 2) $y=|\cos x|$; 3) $y=|\mathrm{tg}\,x|$.

39. Nubrėžkite grafikus:

1) $y=3\sin x$; 2) $y=-1{,}5\sin x$;

3) $y=\sin 3x$; 4) $y=\sin\frac{1}{3}x$;

5) $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$; 6) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$;

7) $y=2\sin(2x+1)$; 8) $y=-1{,}5\sin(x-\frac{\pi}{2})$.

40. Supaprastinkite reiškinius:

1) $\cos 24°\cos 31°-\sin 24°\sin 31°$;

2) $\sin 137°\cos 52°-\cos 137°\sin 52°$;

3) $\cos 7\alpha\cos\alpha+\sin 7\alpha\sin\alpha$;

4) $\cos(60°-\alpha)+\cos(60°+\alpha)$;

5) $\sin(\alpha+30°)-\sin(\alpha-30°)$;

6) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;

7) $\cos(36°+\alpha)\cos(54°+\alpha)-\sin(36°+\alpha)\sin(54°+\alpha)$;

8) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;

9) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$;

10) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}$.

41. Įrodykite tapatybes:

1) $\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}=-\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\sin(\alpha-2\pi)\cos(2\pi-\beta)-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\frac{\sin(45°+\alpha)-\cos(45°+\alpha)}{\sin(45°+\alpha)+\cos(45°+\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\frac{\sin(30°+\alpha)-\cos(60°+\alpha)}{\sin(30°+\alpha)+\cos(60°+\alpha)}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$;

5) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

6) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

7) $\sin(\alpha-2\pi)\cos(2\pi-\beta)-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin(\alpha-\beta)$;

8) $\sin(90°+\alpha)\cos(90°+\beta)-\cos(90°+\alpha)\sin(90°+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$.

42. Apskaičiuokite naudodamiesi skaičiuotuvu:

1) $\sin(\alpha+\beta)$, kai $\sin\alpha=0{,}72$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\cos\beta=-0{,}67$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$;

2) $\cos(\alpha-\beta)$, kai $\cos\alpha=0{,}91$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\sin\beta=-0{,}42$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$;

3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, kai $\operatorname{tg}\alpha=1{,}2$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=-2{,}3$ $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;

4) $\sin(\alpha-\beta)$, kai $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}$, α ir β yra antrajame ketvirtyje.

43. Apskaičiuokite skaičiuotuvu:

1) $\sin 2\alpha$, kai $\cos\alpha=-0{,}43$ ir α yra antrajame ketvirtyje;

2) $\cos 2\alpha$, kai $\sin\alpha=0{,}74$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha$, kai $\cos\alpha=-0{,}56$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$;

4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha=2{,}75$ ir $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

44. Įrodykite tapatybes:

1) $1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin 2\alpha$;

2) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

3) $4\sin\beta\cos\beta\cos 2\beta=\sin 4\beta$;

4) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin 4\alpha$;

5) $2\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$;

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2\sin 2\alpha$;

7) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$.

45. Supaprastinkite reiškinius:

1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha$; 2) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{1+\cos\frac{\alpha}{4}}}$; 3) $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$.

46. Supaprastinkite reiškinius:

1) $\frac{\sin 86°-\sin 24°}{\sin 86°+\sin 24°}$; 2) $\frac{\cos\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha}$;

3) $\frac{\sin 64°+\cos 64°}{\sin 64°-\cos 64°}$; 4) $\frac{1+\sin 80°}{1-\sin 80°}$;

5) $\frac{1-\cos 62°}{1+\cos 62°}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}7\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}7\alpha}$.

47. Pakeiskite sandaugomis šiuos reiškinius:

1) $\sin 10°+\sin 50°-\sin 70°$;

2) $\cos 20°+\cos 100°+\cos 140°$;

3) $\sin 47°+\sin 61°-\sin 11°-\sin 25°$;

4) $\cos 47°-\cos 61°-\cos 11°+\cos 25°$;

5) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$;

6) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$.

48. Užrašykite pateiktąsias lygybes naudodamiesi atvirkštinėmis trigonometrinėmis funkcijomis: $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\pi=-1$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

49. Užrašykite pateiktąsias lygybes naudodamiesi trigonometrinėmis funkcijomis:

1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos 1=0$;

3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$.

50. Apskaičiuokite:

1) $\arccos\frac{1}{2}+2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+3\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

2) $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+5\operatorname{arctg}(-1)+3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

51. Apskaičiuokite reiškinius:

1) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2})+3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$;

2) $\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$;

3) $\operatorname{tg}(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{1}{2})$;

4) $\sin(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})+2\operatorname{arctg}1)$;

5) $2\arcsin 0{,}75+3\arccos 0{,}83+2\operatorname{arctg}7{,}6$;

6) $3\arccos(-0{,}518)+2\operatorname{arctg}(-2{,}65)+\arcsin(-0{,}698)$.

52. Išspręskite lygtis:

1) $2\cos x+\sqrt{2}=0$;

2) $3\operatorname{tg}(x+15^\circ)-\sqrt{3}=0$;

3) $\cos^2 x-\sin^2 x=1$;

4) $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$;

5) $2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=5$;

6) $(1+\operatorname{tg}x)\cos x=0$;

7) $4\sin^3 x-8\sin^2 x-\sin x+2=0$;

8) $\cos 3x+\cos x=0$;

9) $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$;

10) $\sin^2 x-8\sin x\cos x+7\cos^2 x=0$;

11) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$;

12) $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$;

13) $5\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=2$;

14) $8\sin x-\cos x=4$;

15) $\cos^2(90^\circ+x)-\cos^2 x-3\cos(90^\circ-x)+2=0$;

16) $4\sin x\cos x\cos 2x=1$;

17) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$;

18) $\cos(x-30^\circ)-\cos(x+30^\circ)=0$.

53. Išspręskite nelygybes:

1) $\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}x<\frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $\operatorname{ctg}x\leqslant-1$.

7.17. Atsakymai

2. 1) 0,855; 2) 2,72; 3) 5,50; 4) 10,0; 5) 1,28; 6) 1,28; 7) 1,50; 8) 4,33. **3.** 1) 53° 52′; 2) 220° 35′; 3) 243° 31′; 4) 423° 25′; 5) 784° 57′; 6) 20°; 7) 18°; 8) 10°. **4.** 1,29. **5.** 78°. **6.** 15°, 60°, 105° arba $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}$. **7.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) $\frac{5\pi}{3}$; 3) 0,19; 4) 1,73; 5) 12,3; **8.** $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \frac{n-2}{n}\pi$. **9.** $\frac{\pi}{16}$, 11° 15′. **10.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{20\pi}{9}$; 3) $\frac{50\pi}{9}$. **11.** 10 rad/s. **12.** 508 apsisukimai. **13.** $\pi/21600$ rad/s; $\pi/1800$ rad/s. **14.** 1) $0{,}72+2\pi$; 2) $3{,}72+2\pi$; 3) $6{,}16+2\pi\cdot 3$; 4) $6+2\pi\cdot 6$; 5) $-1{,}03-2\pi\cdot 2$; 6) $-5{,}3-2\pi\cdot 8$. **15.** $1+2\pi k$, $\pi/4+2\pi k$, $\pi/2+2\pi k$, $7+2\pi k$, $k\in Z$. **16.** (1, 0), $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, (0, 1), (−1, 0) (0, −1), (1, 0). **18.** 1) $x\in R$; 2) $x\neq \pi k$, $k\in Z$; 3) $x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; 4) $x\in R$; 5) $x\neq \pi+2\pi k$, $k\in Z$; 6) $x\in R$; 7) $x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$; 8) $x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$; 9) $x\neq \frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 10) $x\neq \frac{\pi}{5}k$, $x\neq (2k+1)\pi/10$, $k\in Z$. **19.** 1) $x\neq \frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 2) $x\neq \frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 3) $x\neq 2\pi k$, $k\in Z$; 4) $x\neq \pi k$, $x\neq \pi/4+\pi k$, $k\in Z$; 5) $x\neq 15°+60°k$, $k\in Z$; 6) $x\neq 1\pm\sqrt{\pi(2k+1)}$, $k\in Z$. **20.** 1) taip; 2) ne; 3) ne; 4) taip; 5) taip; 6) ne; 7) taip. **22.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 2) $2\pi(2k+1)$, $4\pi k$, $k\in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{3}(2k+1)$, $\frac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$. **23.** 1) $3\pi k$; 2) $(2k+1)\frac{\pi}{8}$, $k\in Z$; 3) $\pi k-\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$; 4) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$, $k\in Z$. **24.** 1) [−1, 1]; 2) [0, 1]; 3) [0, 1]; 4) $[0, \infty)$. **25.** 1) 0; 2) 1; 3) −1; 4) $(a-b)^2$; 5) $-\frac{1}{7}$; 6) 6/17; 7) −2; 8) $2\frac{1}{4}$. **27.** 1) $\cos\alpha=-4/5$, $\operatorname{tg}\alpha=3/4$, $\operatorname{ctg}\alpha=4/3$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha=-1$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\alpha=-\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{9}{40}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-4\frac{4}{9}$; 4) $\sin\alpha=7/25$, $\cos\alpha=24/25$, $\operatorname{ctg}\alpha=24/25$; 5) $\operatorname{tg}\alpha=15/8$, $\sin\alpha=\pm 15/17$, $\cos\alpha=\pm 8/17$; 6) $\cos\alpha=-0{,}78$, $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}79$, $\operatorname{ctg}\alpha=-1{,}3$; 7) $\sin\alpha=-0{,}97$, $\operatorname{tg}\alpha=4{,}2$, $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}24$; 8) $\sin\alpha=-0{,}90$, $\cos\alpha=0{,}43$, $\operatorname{ctg}\alpha=-0{,}48$; 9) $\sin\alpha=0{,}41$, $\cos\alpha=0{,}91$, $\operatorname{tg}\alpha=0{,}45$. **31.** 1) 2,5; 2) −4; 3) 0,51; 4) 0,2. **32.** 1) lyginė; 2) nei lyginė, nei nelyginė; 3) nelyginė; 4) lyginė; 5) nelyginė; 6) nei lyginė, nei nelyginė; 7) lyginė; 8) nelyginė. **34.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) −2; 4) $1\frac{9}{16}$. **35.** 1) 5/4; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 6; 4) 0. **36.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 4) $2\cos\alpha$; 5) −1; 6) 0; 7) $-\cos\alpha$; 8) $-\cos\alpha$. **40.** 1) cos 55°; 2) sin 85°; 3) $\cos 6\alpha$; 4) $\cos\alpha$; 5) $\cos\alpha$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $-\sin 2\alpha$; 8) $\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$; 9) $-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 10) $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$. **42.** 1) 0,033; 2) −1; 3) −0,29; 4)

$-0{,}424$. **43.** 1) $-0{,}78$; 2) $-0{,}48$; 3) $-2{,}5$; 4) $-1{,}19$. **45.** 1) 1; 2) $|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}|$; 3) $\sqrt{2}|\cos 4\alpha|$. **46.** 1) $\operatorname{ctg} 55° \operatorname{tg} 31°$; 2) $\operatorname{ctg} 3\alpha$; 3) $\operatorname{ctg} 19°$; 4) $\operatorname{ctg}^2 5°$; 5) $\operatorname{tg}^2 31°$; 6) $-\frac{\sin 5\alpha}{\sin 9\alpha}$. **47.** 1) 0; 2) 0; 3) $\cos 7°$; 4) $\sin 7°$; 5) $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$; 6) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$. **50.** 1) 360°; 2) 195°. **51.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) 364°; 6) 181°. **52.** 1) $\pm 135°+360°k$, $k\in Z$; 2) $15°+180°k$, $k\in Z$; 3) $180°k$, $k\in Z$; 4) $(-1)^k 30°+180°k$, $(-1)^k 19{,}5°+180°k$, $k\in Z$; 5) $45°+180°k$, $56{,}3°+180°k$, $k\in Z$; 6) $-45°+180°k$, $k\in Z$; 7) $\pm 30°+180°k$, $k\in Z$; 8) $45°+90°k$, $90°+180°k$, $k\in Z$; 9) $90°k$, $(-1)^k 30°+180°k$, $k\in Z$; 10) $45°+180°k$, $81{,}9°+180°k$, $k\in Z$; 11) $60+180°k$, $k\in Z$; 12) $45°+180°k$, $k\in Z$; 13) $45°+180°k$, $-59°+180°k$, $k\in Z$; 14) $36{,}87°+360°k$, $157{,}4°+360°k$, $k\in Z$; 15) $90°+360°k$, $(-1)^k 30°+180°k$, $k\in Z$; 16) $22{,}5°+90°k$, $k\in Z$; 17) $30°+90°k$, $\pm 60°+180°k$, $k\in Z$; 18) $180°k$, $k\in Z$. **53.** 1) $(-\frac{4\pi}{3}+2\pi k, \frac{\pi}{3}+2\pi k)$, $k\in Z$; 2) $[\frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{7\pi}{4}+2\pi k]$, $k\in Z$; 3) $(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}+\pi k)$, $k\in Z$; 4) $[\frac{3\pi}{4}+\pi k, \pi+\pi k)$, $k\in Z$.

8. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

8.1. Kompleksinio skaičiaus sąvoka

Kvadratinė lygtis $ax^2+bx+c=0$, kurioje a, b, c — bet kokie realieji skaičiai ($a\neq 0$), turi dvi, vieną arba nė vienos realiosios šaknies (žr. 3.10 skyrelį).

Šaknys apskaičiuojamos pagal formulę

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Taigi, jeigu $b^2-4ac<0$, tai lygtis neturi realiųjų šaknų, nes realiųjų skaičių aibėje nėra tokio skaičiaus, kurio kvadratas būtų neigiamasis skaičius. Kvadratinė lygtis šiuo atveju — neišsprendžiama. Kad ši lygtis turėtų sprendinį, prie realiųjų skaičių aibės reikia prijungti naujus skaičius.

Priimsime be įrodymo, jog galima taip praplėsti realiųjų skaičių aibę, kad gautajame plėtinyje būtų toks skaičius, kurio kvadratas lygus -1. Tą skaičių vadinsime *menamuoju* vienetu ir žymėsime raide i.

Taigi

$$\boxed{i^2=-1}.$$

Išspręskime kvadratinę lygtį

$$x^2-4x+13=0.$$

Naudodamiesi kvadratinės lygties šaknų formule (žr. 3.10 skyrelį), užrašykime sprendinius:

$$x=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm\sqrt{9\cdot(-1)}=2\pm3\sqrt{-1}=2\pm3i.$$

Dvinarius $2+3i$ ir $2-3i$ vadinsime kompleksiniais skaičiais.

Apibrėžimas. Reiškinys $a+bi$, a ir b — realieji skaičiai, i — menamasis vienetas, vadinamas *kompleksiniu skaičiumi.*

Pavyzdžiui, reiškiniai $-5+2i$, $-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i$, $\sqrt{3}+i\sqrt{5}$ yra kompleksiniai skaičiai.

Užrašas $z=a+bi$ vadinamas kompleksinio skaičiaus *algebrine forma.* Realusis skaičius a vadinamas kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ *realiąja dalimi*, žymima $\mathrm{Re}z$, realusis skaičius b — *menamąja dalimi*, žymima $\mathrm{Im}z$. Taigi

$$\mathrm{Re}z=a \text{ ir } \mathrm{Im}z=b.$$

Pavyzdžiui, skaičiaus $z=5-2i$ realioji dalis lygi 5, t. y. $\mathrm{Re}z=5$, menamoji lygi -2, t. y. $\mathrm{Im}z=-2$.

Jeigu $b\neq0$, tai kompleksinis skaičius $z=a+bi$ vadinamas *menamuoju.*

Jeigu $b=0$, tai kompleksinis skaičius $z=a+0i$ vadinamas *realiuoju* ir užrašomas $z=a$.

Jeigu $a=0$, $b\neq0$, tai kompleksinis skaičius $z=0+bi$ vadinamas *grynai menamu* ir užrašomas $z=bi$.

Du kompleksiniai skaičiai $z_1=a_1+b_1i$ ir $z_2=a_2+b_2i$ vadinami *lygiais* tada ir tik tada, kai lygios jų realiosios ir menamosios dalys. Taigi

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i,$$

jei

$$a_1=a_2 \text{ ir } b_1=b_2.$$

Kompleksinis skaičius $z=a+bi$ lygus nuliui, jei $a=0$ ir $b=0$, t. y. $0+0i=0$.

Skaičiai $a+bi$ ir $a-bi$, kurie skiriasi tik menamosios dalies ženklu, vadinami vienas kitam *jungtiniais* kompleksiniais skaičiais ir atitinkamai žymimi

$$z=a+bi \text{ ir } \bar{z}=a-bi.$$

Pavyzdžiui,

$$z=2+7i \text{ ir } \bar{z}=2-7i,$$

$$z_1=-4-3i \text{ ir } \bar{z}_1=-4+3i.$$

Kompleksiniai skaičiai $z=a+bi$ ir $-z=-a-bi$ vadinami *priešingaisiais.*

Pavyzdžiui,

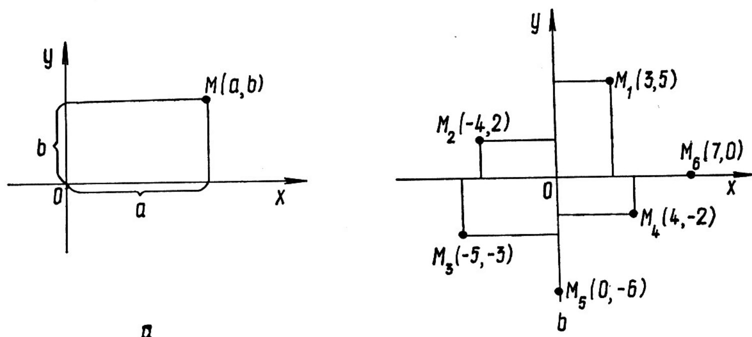
$$z=5+3i \text{ ir } -z=-5-3i,$$

$$z_1=-6+4i \text{ ir } -z_1=6-4i.$$

Kompleksiniai skaičiai vartojami ne tik matematikoje, bet ir daugelyje inžinerinių disciplinų. Elektrotechnikoje menamasis vienetas žymimas raide *j*.

8.2. Kompleksinių skaičių geometrinis vaizdavimas

Kiekvienam kompleksiniam skaičiui $z=a+bi$ priskirsime koordinačių plokštumos tašką $M(a, b)$, t. y. tašką, kurio abscisė $x=a$ yra realioji kompleksinio skaičiaus dalis, o ordinatė $y=b$ — menamoji jo dalis. Tada bus teisingas ir atvirkščias teiginys: kiekvienam koordinačių plokštumos taškui $M(a, b)$ galima priskirti kompleksinį skaičių $z=a+bi$. Taigi tarp kompleksinių skaičių aibės ir koordinačių plokštumos taškų galioja abipus vienareikšmė atitiktis (236 pav., *a*).

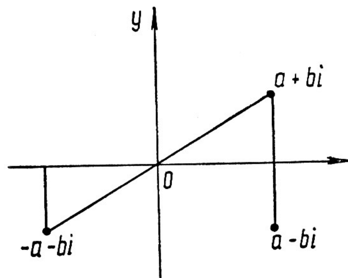


236 pav.

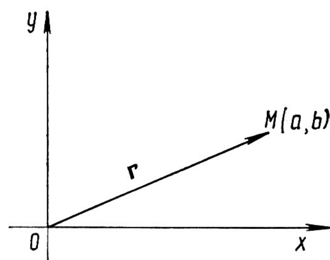
Plokštuma, kurios taškais vaizduojami kompleksiniai skaičiai, vadinama *kompleksine* plokštuma. Realieji skaičiai vaizduojami abscisių ašies taškais. Todėl abscisių ašis vadinama *realiąja* ašimi. Grynai menami skaičiai vaizduojami ordinačių ašies taškais. Ši ašis vadinama *menamąja* ašimi.

236 paveiksle, *b*, kompleksiniai skaičiai $z_1=3+5i$, $z_2=-4+2i$, $z_3=-5-3i$, $z_4=4-2i$, $z_5=0-6i$ ir $z_6=7+0i$ atvaizduoti taškais M_1 (3, 5), $M_2(-4, 2)$, $M_3(-5, -3)$, $M_4(4, -2)$, $M_5(0, -6)$ ir $M_6(7, 0)$.

Jungtiniai kompleksiniai skaičiai vaizduojami taškais, simetriškais ašies Ox atžvilgiu, o priešingieji — taškais, simetriškais koordinačių pradžios taško atžvilgiu (237 pav.).

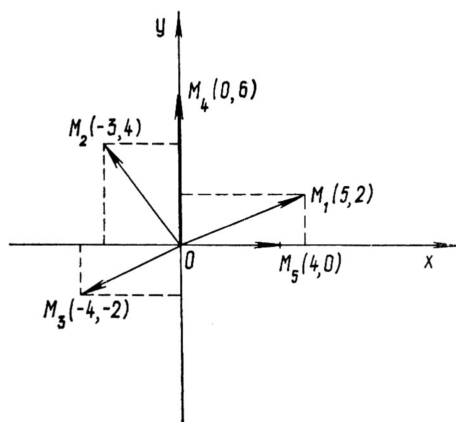


237 pav.



238 pav.

Kompleksinį skaičių $z=a+bi$ galime pavaizduoti ir vektoriumi, kurio pradžia yra taškas $O(0, 0)$, o pabaiga — taškas $M(a, b)$: $\overrightarrow{OM}=r$ (238 pav.).



239 pav.

239 paveiksle kompleksiniai skaičiai $z_1=5+2i$, $z_2=-3+4i$, $z_3=-4-2i$, $z_4=6i$ ir $z_5=4$ pavaizduoti vektoriais $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$, $\overrightarrow{OM_4}$ ir $\overrightarrow{OM_5}$.

8.3. Veiksmai su kompleksiniais skaičiais, užrašytais algebrine forma

8.3.1. Sudėtis. Dviejų kompleksinių skaičių $z_1=a_1+b_1i$ ir $z_2=a_2+b_2i$ *suma* vadinamas kompleksinis skaičius

$$z=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

Iš apibrėžimo išplaukia, kad kompleksiniai skaičiai sudedami kaip paprasti dvinariai. Pavyzdžiui,

$$(3+2i)+(5-3i)=(3+5)+(2-3)i=8-i,$$

$$(4+2i)+(-4-2i)=(4-4)+(2-2)i=0+0i=0,$$

$$(5+2i)+(5-2i)=(5+5)+(2-2)i=10+0i=10.$$

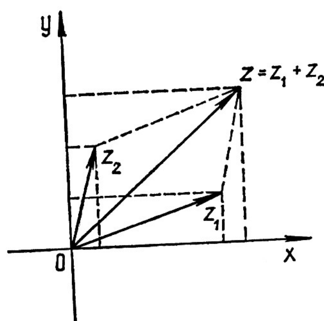
Lengvai patikrinama, kad sudėčiai teisingos perstatymo ir jungimo savybės:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (perstatymo dėsnis);

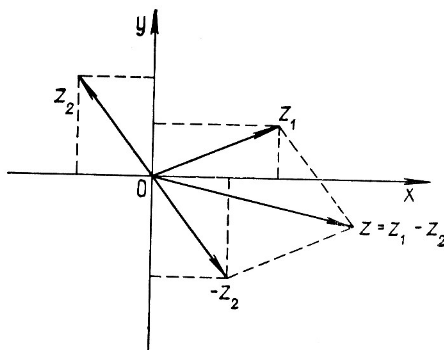
2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (jungimo dėsnis).

Dviejų kompleksinių skaičių suma 240 paveiksle pavaizduota geometriškai.

8.3.2. Atimtis. Atimtis yra veiksmas, atvirkščias sudėčiai. Dviejų kompleksinių skaičių $z_1=a_1+b_1i$ ir $z_2=a_2+b_2i$ *skirtumas* yra toks skaičius $z=x+yi$, kurį sudėję su z_2 gauname z_1: $z+z_2=z_1$.



240 pav.



241 pav.

Taigi, remdamiesi kompleksinių skaičių sudėties apibrėžimu, pastarąją lygybę galime užrašyti šitaip:

$$(x+yi)+(a_2+b_2i)=a_1+b_1i,$$

arba

$$(x+a_2)+(y+b_2)i=a_1+b_1i.$$

Iš čia pagal kompleksinių skaičių lygybės apibrėžimą išplaukia

$$x+a_2=a_1 \text{ ir } y+b_2=b_1,$$

arba

$$x=a_1-a_2 \text{ ir } y=b_1-b_2.$$

Vadinasi,

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

Matome, kad atimant kompleksinius skaičius atitinkamai atimamos jų realiosios ir menamosios dalys. Pavyzdžiui,

$$(9+5i)-(4+3i)=(9-4)+(5-3)i=5+2i,$$

$$(7-2i)-(-2+4i)=(7+2)+(-2-4)i=9-6i.$$

241 paveiksle skaičių $z_1=5+2i$ ir $z_2=-3+4i$ skirtumas pavaizduotas geometriškai ($-z_2$ — skaičius, priešingas z_2).

8.3.3. Daugyba. Kompleksinių skaičių $z_1=a_1+b_1i$ ir $z_2=a_2+b_2i$ *sandauga* vadinamas skaičius $(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad kompleksinius skaičius galima dauginti kaip paprastus dvinarius i^2 pakeičiant -1. Pavyzdžiui,

$$(4-2i)(3+i)=12-6i+4i-2i^2=14-2i.$$

Jungtinių kompleksinių skaičių sandauga — realusis skaičius:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

Pavyzdžiui,

$$(5-3i)(5+3i)=25-9i^2=34.$$

Lengva įrodyti, kad su bet kokiais kompleksiniais skaičiais z_1, z_2 ir z_3 teisingos šios lygybės:

1) $z_1z_2=z_2z_1$ (daugybos perstatymo dėsnis);
2) $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ (daugybos jungimo dėsnis);
3) $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ (skirstymo dėsnis).

8.3.4. Dalyba. Tai veiksmas, atvirkščias daugybai.

Dviejų kompleksinių skaičių $z_1=a_1+b_1i$ ir $z_2=a_2+b_2i$ (čia $z_2\neq 0$) *dalmuo* yra kompleksinis skaičius $z=x+yi$, kurį padauginus iš daliklio z_2, gaunamas dalinys z_1.

Taigi, jeigu

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=x+yi,$$

tai

$$(x+yi)(a_2+b_2i)=a_1+b_1i,$$

arba

$$(a_2x-b_2y)+(b_2x+a_2y)i=a_1+b_1i.$$

Iš čia pagal kompleksinių skaičių lygybės apibrėžimą sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_2x-b_2y=a_1, \\ b_2x+a_2y=b_1. \end{cases}$$

Ją išsprendę gauname

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \qquad y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Vadinasi,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Dalybą galime atlikti ir paprasčiau. Dalinį ir daliklį dauginame iš dalikliui jungtinio skaičiaus ir atliekame veiksmus:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

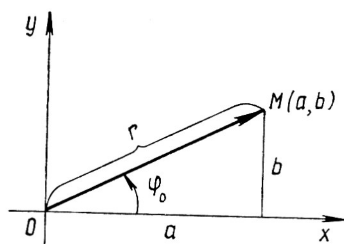
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Pavyzdys. $\frac{5-2i}{4+3i}=\frac{(5-2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{20-8i-15i+6i^2}{16-9i^2}=$

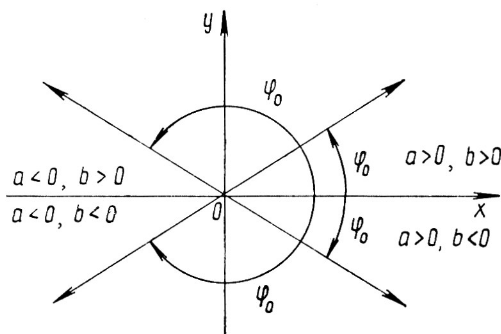
$$=\frac{14-23i}{25}=\frac{14}{25}-\frac{23}{25}i.$$

8.4. Kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma

Koordinačių sistemoje nubrėžkime vektorių $\overrightarrow{OM}=\mathbf{r}=(a, b)$, vaizduojantį kompleksinį skaičių $z=a+bi$ (242 pav.).



242 pav.



243 pav.

Kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ moduliu vadinamas tą skaičių atitinkančio vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ ilgis ir žymimas $|z|$.

242 paveiksle matome, kad

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Kampas φ_0 ($\varphi_0=(-\pi, \pi]$), kurį vektorius $\overrightarrow{OM}$ sudaro su teigiamąja ašies Ox kryptimi, vadinamas kompleksinio skaičiaus *pagrindiniu* argumentu. Kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ pagrindinis argumentas žymimas

$$\varphi_0=\arg z \quad \text{arba} \quad \varphi_0=\arg(a+bi).$$

Kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ pagrindinio argumento reikšmė randama vienareikšmiškai iš lygybių (žr. 242 pav.)

$$\begin{cases} \cos\varphi_0=\dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi_0=\dfrac{b}{r}, \end{cases}$$

arba nevienareikšmiškai iš lygybės

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{b}{a}. \tag{2}$$

Kadangi kompleksinį skaičių atitinkančio vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ padėtį koordinačių sistemoje nusako begalinė kampų aibė, tai kiekvienas kompleksinis skaičius turi begalinę argumentų aibę. Argumentai

vienas nuo kito skiriasi 2π kartotiniu. Visas kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ argumento reikšmes užrašome šitaip:

$$\varphi=\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k, \qquad k\in Z.$$

Vienintelė $\operatorname{Arg} z$ reikšmė $\varphi_0=\arg z$ tenkina sąlygą $\varphi_0\in(-\pi, \pi]$ arba $\varphi_0\in[0, 2\pi)$.

Iš (2) formulių išplaukia

$$a=r\cos\varphi_0 \text{ ir } b=r\sin\varphi_0.$$

Todėl

$$z=a+bi=r\cos\varphi_0+ir\sin\varphi_0=r(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)=$$
$$=r(\cos(\varphi_0+2\pi k)+i\sin(\varphi_0+2\pi k))=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \quad \textbf{(4)}$$

Išraiška $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ vadinama *trigonometrine* kompleksinio skaičiaus forma.

Norint kompleksinį skaičių $z=a+bi$ užrašyti trigonometrine forma, reikia apskaičiuoti kompleksinio skaičiaus modulį $|z|$ ir argumentą $\operatorname{Arg} z$.

Dažnai pagrindinė argumento reikšmė randama iš sąryšio

$$\varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Žinome, kad $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{b}{a}<\frac{\pi}{2}$, todėl argumento φ_0 reikšmę nustatome pagal a ir b ženklus (žr. 243 pav.):

$$\varphi_0=\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \text{ kai } a>0, \\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \text{ kai } a<0, \quad b\geqslant 0, \\ -\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \text{ kai } a<0, \quad b<0. \end{cases} \quad (3)$$

Jeigu $a=0$, tai $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ neegzistuoja. Kompleksinis skaičius $z=0+bi=bi$ yra grynai menamas ir jis geometriškai vaizduojamas vektoriumi, esančiu ašyje Oy. Todėl, jeigu $b>0$, tai $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$; jeigu $b<0$, tai $\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$.

Pavyzdžiai. Išreikškime pateiktuosius kompleksinius skaičius trigonometrine forma.

1. $z=\sqrt{3}+i$.

Apskaičiuojame modulį:

$$r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2.$$

Kadangi $a=\sqrt{3}>0$, tai (žr. (3) formules)

$$\arg z=\varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Todėl

$$z=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\right).$$

2. $z=-1-i$.

Skaičiuojame modulį:

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

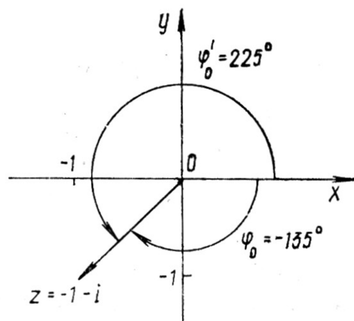
Kadangi $a=-1<0$ ir $b=-1<0$, tai

$$\arg z=\varphi_0=-180°+\operatorname{arctg}\frac{-1}{-1}=-180°+\operatorname{arctg}1=$$
$$=-180°+45°=-135°.$$

Todėl

$$z=-1-i=\sqrt{2}(\cos(-135°)+i\sin(-135°))=$$
$$=\sqrt{2}(\cos 135°-i\sin 135°)=\sqrt{2}(\cos(135°+360°k)-$$
$$-i\sin(135°+360°k)).$$

Šiame pavyzdyje kompleksinio skaičiaus $z=-1-i$ pagrindinė argumento reikšmė yra $\varphi_0=-135°$, tačiau galima imti teigiamąją



244 pav.

pagrindinio argumento reikšmę $\varphi_0'=225°$ (žr. 244 pav.). Tada kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma yra šitokia:

$$z=\sqrt{2}(\cos 225°+i\sin 225°)=\sqrt{2}(\cos(225°+360°k)+$$
$$+i\sin(225°+360°k)).$$

3. $z=-7$.

Skaičiaus modulis yra $|z|=7$, o pagrindinis argumentas $\arg z=$ $=\varphi_0=\pi+\operatorname{arctg}\frac{0}{-7}=\pi$ (245 pav., a). Todėl

$$z=-7=7(\cos\pi+i\sin\pi)=7(\cos(\pi+2\pi k)+i\sin(\pi+2\pi k)).$$

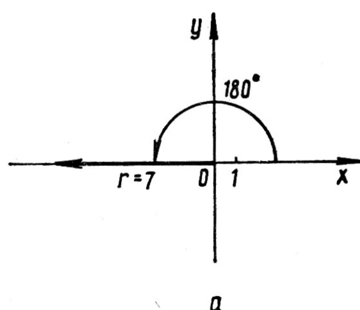
4. $z=-3i$.

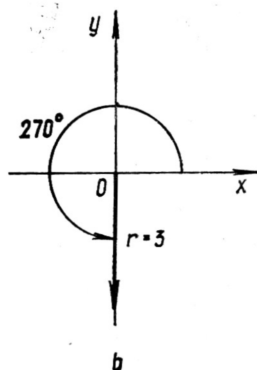
Šis skaičius pavaizduotas 245 paveiksle, *b*. Jo modulis yra $r=|z|=3$, o pagrindinis argumentas — $\varphi_0=\arg z=-90°$ arba $\varphi_0'=270°$. Todėl

$$z=-3i=3(\cos(-90°)+i\sin(-90°))=3(\cos 90°-i\sin 90°)=$$
$$=3(\cos(90°+360°k)-i\sin(90°+360°k)),$$

arba

$$z=-3i=3(\cos 270°+i\sin 270°)=3(\cos(270°+360°k)+$$
$$+i\sin(270°+360°k)).$$





245 pav.

Kadangi kompleksinio skaičiaus argumentas nustatomas nevienareikšmiškai, tai du kompleksiniai skaičiai, išreikšti trigonometrine forma, yra lygūs, kai jų moduliai lygūs, o argumentai lygūs arba skiriasi dydžiu, kartotiniu 2π, t. y.

$$z_1=z_2, \text{ kai } r_1=r_2 \text{ ir } \varphi_1=\varphi_2+2\pi k,\ k\in Z.$$

Toliau kampleksinius skaičius užrašysime trigonometrine forma imdami tik pagrindinę argumento reikšmę. Pagrindinę argumento reikšmę imsime arba iš intervalo $(-\pi, \pi]$, arba iš intervalo $[0, 2\pi)$.

8.5. Veiksmai su kompleksiniais skaičiais, užrašytais trigonometrine forma

Su kompleksiniais skaičiais, užrašytais trigonometrine forma, labai lengvai atliekame daugybos, dalybos, kėlimo laipsniu ir šaknies traukimo veiksmus.

8.5.1. Daugyba. Sudauginsime du kompleksinius skaičius z_1 ir z_2, kai

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Taigi

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+$$
$$+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)).$$

Kadangi

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

ir

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

tai

$$\boxed{z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).} \quad (1)$$

Taigi *dviejų kompleksinių skaičių sandaugos modulis lygus tų skaičių modulių sandaugai, o argumentas — tų skaičių argumentų sumai.*

Sudauginę tris kompleksinius skaičius, gauname

$$z_1z_2z_3=r_1r_2r_3(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)).$$

Galima gauti ir bet kurio skaičiaus n dauginamųjų sandaugos formulę:

$$z_1z_2z_3...z_n=r_1r_2r_3...r_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+$$
$$+...+\varphi_n)). \quad (2)$$

Pavyzdžiai. Rasime pateiktųjų kompleksinių skaičių sandaugą.

1. $z_1=4(\cos 123°+i\sin 123°)$,

$z_2=2(\cos 45°+i\sin 45°)$.

$$z_1z_2=4\cdot 2(\cos(123°+45°)+i\sin(123°+45°))=8(\cos 168°+$$
$$+i\sin 168°).$$

2. $z_1=5(\cos 96°+i\sin 96°)$,

$z_2=3(\cos 18°-i\sin 18°)$.

Antrojo kompleksinio skaičiaus argumentas — neigiamas, todėl tą skaičių perrašome šitaip:

$$z_2=3(\cos(-18°)+i\sin(-18°)).$$

Sudauginę gauname

$$z_1z_2=5\cdot 3(\cos(96°+(-18°))+i\sin(96°+(-18°)))=15(\cos 78°+$$
$$+i\sin 78°).$$

3. $z_1=2(\cos 53°+i\sin 53°)$,

$z_2=3(\cos 25°+i\sin 25°)$,

$z_3=5(\cos 40°-i\sin 40°)$.

$$z_1z_2z_3=2\cdot 3\cdot 5(\cos(53°+25°+(-40°))+i\sin(53°+25°+(-40°)))=$$
$$=30(\cos 38°+i\sin 38°).$$

8.5.2. Dalyba. Rasime skaičių $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ir $z_2=$ $=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ dalmenį:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}.$$

Padauginę dalinį ir daliklį iš $\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2$, gauname:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1((\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1))}{r_2(\cos^2\varphi_2+i\sin^2\varphi_2)}.$$

Kadangi

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1=\sin(\varphi_1-\varphi_2),$$

o

$$\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2=1,$$

tai

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).} \tag{3}$$

Dviejų kompleksinių skaičių dalmens modulis lygus tų skaičių modulių dalmeniui, o argumentas — tų skaičių argumentų skirtumui.

Pavyzdžiai. 1. $\frac{2(\cos 64°+i\sin 64°)}{0,5(\cos 21°+i\sin 21°)}=\frac{2}{0,5}(\cos(64°-21°)+$

$$+i\sin(64°-21°))=4(\cos 43°+i\sin 43°).$$

2. $\frac{4(\cos 112°+i\sin 112°)}{5(\cos 23°-i\sin 23°)}=\frac{4}{5}(\cos(112°-(-23°))+$

$$+i\sin(112°-(-23°)))=0,8(\cos 135°+i\sin 135°).$$

8.5.3. Kėlimas laipsniu. n lygių kompleksinių skaičių $z_1=z_2=\ldots=$ $=z_n=z$ sandaugą vadiname kompleksinio skaičiaus z n-uoju laipsniu ir žymime z^n, t. y.

$$\underbrace{zz\ldots z}_{n \text{ dauginamųjų}}=z^n.$$

Apskaičiuokime i^n (n — natūrinis skaičius):

$i^1=i$,	$i^5=i^4\cdot i=i$,
$i^2=-1$ (pagal apibrėžimą),	$i^6=i^4\cdot i^2=-1$,
$i^3=i^2\cdot i=-i$,	$i^7=i^4\cdot i^3=-i$,
$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$,	$i^8=i^4\cdot i^4=1$.

Matome, kad

$i^{4n}=(i^4)^n=1$,	$i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=i$,
$i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=-1$,	$i^{4n+3}=i^{4n}\cdot i^3=-i$.

Taigi *norint apskaičiuoti* i^n *(n — natūrinis skaičius), reikia laipsnio rodiklį padalyti iš* 4 *ir* i *kelti laipsniu, kurio rodiklis yra dalybos*

liekana, turint omenyje, kad $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$.

Pavyzdžiai. $i^{75}=i^3=-i$, $i^{104}=i^0=1$, $i^{50}=i^2=-1$, $i^{81}=i^1=i$.

Kompleksinis skaičius, užrašytas algebrine forma, keliamas laipsniu pagal dvinario kėlimo laipsniu taisyklę.

Pavyzdžiai. $(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$;

$$(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i;$$

$$(-2+i)^4=((-2+i)^2)^2=(4-4i+i^2)^2=(3-4i)^2=9-24i+16i^2=$$
$$=-7-24i.$$

Kompleksinio skaičiaus laipsnis su natūriniu rodikliu yra kompleksinis skaičius.

Remdamiesi (2) formule, kai $z_1=z_2=\ldots=z_n=z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gauname

$$\underbrace{zz\ldots z}_{n\ \text{daugi-namųjų}}=\underbrace{rr\ldots r}_{n\ \text{daugi-namųjų}}(\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\ \text{dėme-nų}})+i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\ \text{dėme-nų}})),$$

arba

$$\boxed{z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).} \qquad (4)$$

Ši formulė vadinama anglų matematiko Muavro vardu.

Keldami laipsniu kompleksinį skaičių, užrašytą trigonometrine forma, gauname kompleksinį skaičių, kurio modulis lygus duotojo skaičiaus moduliui, pakeltam tuo laipsniu, o argumentas lygus laipsnio rodikliui, padaugintam iš duotojo skaičiaus argumento.

Pavyzdžiai. 1. $(2(\cos 15°+i\sin 15°))^4=2^4(\cos 4\cdot 15°+i\sin 4\cdot 15°)=$ $=16(\cos 60°+i\sin 60°)$.

2. $(1+i)^{20}$.

Užrašykime skaičių $1+i$ trigonometrine forma:

$$|z|=r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\ \arg z=\varphi_0=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1}=45°.$$

Tada

$$(1+i)^{20}=(\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°))^{20}=2^{10}(\cos 900°+i\sin 900°)=$$
$$=2^{10}(\cos(360°\cdot 2+180°)+i\sin(360°\cdot 2+180°))=2^{10}(\cos 180°+$$
$$+i\sin 180°)=2^{10}(-1+0i)=-2^{10}=-1024.$$

8.5.4. Šaknies traukimas. n-ojo laipsnio šaknis iš kompleksinio skaičiaus z yra toks skaičius $\omega=\sqrt[n]{z}$, kurį pakėlus n-uoju laipsniu gaunamas skaičius z, t. y. $\omega^n=z$.

Tarkime, kad $z=r(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$ ir

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha). \qquad (5)$$

Pagal šaknies apibrėžimą

$$(\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$$

arba

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Remdamiesi kompleksinių skaičių, užrašytų trigonometrine forma, lygybės sąlyga, galime užrašyti

$$\rho^n = r \text{ ir } n\alpha = \varphi_0 + 2\pi k,$$

arba

$$\rho = \sqrt[n]{r}. \tag{6}$$

ir

$$\alpha = \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}. \tag{7}$$

(6) formulėje ρ — aritmetinė šaknies reikšmė.

Įrašę į (5) formulę ρ ir α reikšmes, turime

$$\boxed{\omega = \sqrt[n]{r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right).} \tag{8}$$

Įrašę į (8) formulę $k=0$, $k=1, \ldots, k=n-1$, gausime n skirtingų šaknies reikšmių (jei $r \neq 0$), nes kiekvienu atveju trigonometrinių funkcijų argumentai bus skirtingi:

$$k=0{:}\ \omega_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right);$$

$$k=1{:}\ \omega_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi}{n}\right);$$

$$k=2{:}\ \omega_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 4\pi}{n}\right);$$

. . . .

$$k=n-1{:}\ \omega_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi(n-1)}{n}\right).$$

Tuo atveju, kai $k=n$, gauname

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi n}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right).$$

Taigi gauname tokią pat šaknies reikšmę kaip ir tuo atveju, kai $k=0$. Imdami $k=n+1$, $k=n+2$, ..., gauname tokias pat šaknies reikšmes, kaip imdami $k=1$, $k=2, \ldots$

Darome išvadą, kad traukdami n-ojo laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus, gauname iš viso n skirtingų šaknies reikšmių.

Pavyzdžiai. Ištraukime nurodyto laipsnio šaknis iš kompleksinių skaičių.

1. $\sqrt[3]{i}$.

Užrašome skaičių i trigonometrine forma:

$$i=\cos 90°+i\sin 90°.$$

Todėl

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos 90°+i\sin 90°}=\cos\frac{90°+360°k}{3}+i\sin\frac{90°+360°k}{3}.$$

Pažymėkime skirtingas šaknies reikšmes ω_k, $k=0, 1, 2$. Kai $k=0$,

$$\omega_0=\cos 30°+i\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

kai $k=1$,

$$\omega_1=\cos 150°+i\sin 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

kai $k=2$,

$$\omega_2=\cos 270°+i\sin 270°=-i.$$

2. $\sqrt[4]{81}$.

Užrašome skaičių 81 trigonometrine forma ir skaičiuojame:

$$\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{81(\cos 0°+i\sin 0°)}=$$

$$=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{0°+360°k}{4}+i\sin\frac{0°+360°k}{4}\right).$$

Imdami $k=0, 1, 2, 3$, gauname:

$$\omega_0=3(\cos 0°+i\sin 0°)=3;$$
$$\omega_1=3(\cos 90°+i\sin 90°)=3i;$$
$$\omega_2=3(\cos 180°+i\sin 180°)=-3;$$
$$\omega_3=3(\cos 270°+i\sin 270°)=-3i.$$

3. Išspręskime lygtį

$$x^6-1=0.$$

$$x^6=1,\ x=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{\cos 0°+i\sin 0°}=\cos\frac{0°+360°k}{6}+i\sin\frac{0°+360°k}{6}.$$

Imdami $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$, gauname 6 lygties šaknis:

$$x_0=\cos 0°+i\sin 0°=1;$$
$$x_1=\cos 60°+i\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$
$$x_2=\cos 120°+i\sin 120°=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$
$$x_3=\cos 180°+i\sin 180°=-1;$$
$$x_4=\cos 240°+i\sin 240°=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$
$$x_5=\cos 300°+i\sin 300°=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Gavome 2 realiąsias ir 4 menamąsias šaknis.

8.6. Kompleksinio skaičiaus rodiklinė forma

Elektrotechnikoje, radiotechnikoje ir kituose moksluose kompleksiniai skaičiai dažnai užrašomi rodikline forma.

Matematikoje žinoma žymaus matematiko, mechaniko, fiziko **Oilerio** vardu pavadinta formulė:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}; \qquad (1)$$

čia e — iracionalusis skaičius (žr. 4.13 skyrelį).

Kaip žinome, kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ trigonometrinė forma yra $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, todėl pagal (1) formulę kompleksinį skaičių galime užrašyti vadinamąja rodikline forma:

$$\boxed{z=re^{i\varphi}.}$$

Imkime du kompleksinius skaičius $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ir $z_2=$ $=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Jų rodiklinės formos yra

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1} \text{ ir } z_2=r_2e^{i\varphi_2}.$$

Lengva pastebėti, kad skaičių z_1 ir z_2 sandaugą $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+$ $+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ atitinka išraiška $r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, kurią laikysime kompleksinių skaičių z_1 ir z_2, užrašytų rodikline forma, sandauga. Taigi

$$\boxed{z_1z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.}$$

Panašiai gauname kompleksinių skaičių, užrašytų rodikline forma, dalybos, kėlimo laipsniu ir šaknies traukimo formules:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z^n=(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\varphi_0}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}},\ k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Pavyzdžiai. 1. Užrašykime skaičių $z=-\sqrt{3}+i$ rodikline forma.

Rasime kompleksinio skaičiaus modulį ir argumentą panašiai, kaip tai darėme norėdami kompleksinį skaičių užrašyti trigonometrine forma (žr. 8.4 skyrelį).

$$r=|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2.$$

Kadangi $-\sqrt{3}<0$, $1>0$, tai

$$\arg z=\varphi_0=180^\circ+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{-\sqrt{3}}=180^\circ-30^\circ=150^\circ.$$

Todėl

$$z=-\sqrt{3}+i=2e^{i150^\circ}.$$

2. Užrašykime skaičių $4e^{i60^\circ}$ algebrine forma.

$$4e^{i60^\circ}=4(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+2i\sqrt{3}.$$

3. Atlikime veiksmus:

$$3e^{i72^\circ}\cdot 2e^{i10^\circ}=6e^{i82^\circ};$$

$$4{,}5e^{i103^\circ}:5e^{-i40^\circ}=0{,}9e^{i143^\circ};$$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[4]{\sqrt{2e^{i45^\circ}}}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{45^\circ+360^\circ k}{4}},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

4. Apskaičiuokime $e^{2{,}6+1{,}2i}$.

$$e^{2{,}6+1{,}2i}=e^{2{,}6}\cdot e^{1{,}2i}=e^{2{,}6}(\cos 1{,}2+i\sin 1{,}2)=$$
$$=13{,}5(0{,}362+i\,0{,}932)=4{,}9+13i.$$

8.7. Pratimai

1. Išspręskite kvadratines lygtis:

1) $x^2+4=0$; 2) $x^2+9=0$;

3) $2x^2+49=0$; 4) $9x^2+5=0$;

5) $x^2-6x+25=0$; 6) $y^2-8y+19=0$;

7) $25y^2-100y+109=0$; 8) $9v^2-10v+13=0$.

2. Pasirėmę dviejų kompleksinių skaičių lygumu, raskite x ir y iš šių lygybių:

1) $(x+y)+(x-y)i=5+i$;

2) $(3x+y)+(x+2y)i=9-2i$;

3) $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$;

4) $5x+3xi-2y=-3+19i-4yi$;

5) $\frac{8i}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$;

6) $\frac{i}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$.

3. Pavaizduokite kompleksinius skaičius geometriškai:

1) $5-3i$; 2) $-4-5i$;

3) $-6+2i$; 4) $4+2i$;

5) $4i$; 6) $0-5i$;

7) $-3+0i$; 8) $6+0i$.

4. Apskaičiuokite:

1) $(4-3i)+(-2+i)$; 2) $(5+6i)+(7-6i)$;

3) $(-0{,}7+0{,}3i)+(0{,}9-1{,}7i)$; 4) $(-0{,}4-2{,}1i)+(0{,}6+3i)$;

5) $(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i)+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$; 6) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i)+(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i)$;

7) $(5-3i)-(2+4i)$; 8) $(-7+i)-(-2-3i)$;

9) $(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}i)-(-\frac{1}{2}-i)$; 10) $(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}i)-(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i)$;

11) $(1{,}5-4{,}2i)+(2{,}5-1{,}8i)+(-5-2i)$;

12) $(2\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i)+(3\frac{1}{2}-\frac{5}{6}i)+(\frac{3}{4}-4i)$;

13) $(1{,}8-1{,}2i)+(0{,}1-1{,}3i)-(2{,}5+1{,}7i)-(3{,}3-1{,}6i)$;

14) $(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}i)+(\frac{2}{3}-\frac{1}{10}i)-(\frac{1}{10}-i)$.

5. Parašykite šiems skaičiams jungtinius ir priešingus kompleksinius skaičius:

1) $5+i$;
2) $1-3i$;
3) $-9+2i$;
4) $7-4i$;
5) $-3i$;
6) $5i$;
7) 8;
8) -4.

6. Raskite dviejų jungtinių kompleksinių skaičių sandaugą:

1) $(c+di)(c-di)$;
2) $(7+2i)(7-2i)$;
3) $(-2-3i)(-2+3i)$;
4) $(-5+4i)(-5-4i)$;
5) $(5+i\sqrt{3})(5-i\sqrt{3})$;
6) $(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)$;
7) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i)(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i)$;
8) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i\sqrt{3}}{2})$.

7. Išreikškite dviejų jungtinių kompleksinių skaičių sandauga:

1) a^2+b^2;
2) a^2+9b^2;
3) $4m^2+25n^2$;
4) a^2+4;
5) c^2+1;
6) $5+4i$;
7) $3+2i$;
8) $2+\sqrt{3}$.

8. Suprastinkite trupmenas:

1) $\frac{9a^2+4b^2}{3a+2bi}$;
2) $\frac{c^2+25}{c-5i}$;
3) $\frac{b+1}{\sqrt{b}+i}$;
4) $\frac{m+n}{\sqrt{m}-i\sqrt{n}}$.

9. Atlikite veiksmus:

1) $(3+5i)^2$;
2) $(1-i)(-4)$;
3) $(-3+4i)\cdot 2i$;
4) $(-8-6i)(-2i)$;
5) $(2+3i)(6-5i)$;
6) $(4-2i)(5+3i)$;
7) $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$;
8) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$;
9) $(-1+i)^2$;
10) $(3-2i)^2$.

10. Padalykite:

1) $\frac{2+i}{i}$;
2) $\frac{1+5i}{i}$;
3) $\frac{5}{3i}$;
4) $\frac{4}{5i}$;
5) $\frac{5+3i}{1-2i}$;
6) $\frac{7-2i}{1+3i}$;
7) $\frac{2+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$;
8) $\frac{5-i\sqrt{2}}{5+i\sqrt{2}}$.

11. Atlikite veiksmus:

1) $\frac{3+2i}{3-2i}+\frac{3-2i}{3+2i}$;

2) $\frac{5-3i}{5+3i}-\frac{5+3i}{5-3i}$;

3) $\frac{(3-2i)(4+i)}{5+2i}$;

4) $\frac{(2+6i)(1-i)}{4-3i}$;

5) $\frac{1+i}{2+5i}+\frac{i-2}{5+2i}+\frac{6(5-i)}{29}$;

6) $\frac{(1+i)^2}{(2-2i)^2}\left(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i}\right)$.

12. Apskaičiuokite kompleksinių skaičių modulį ir visas argumento reikšmes:

1) 5; 2) i; 3) $-3i$; 4) -7;

5) $1+i$; 6) $3-4i$; 7) $-\sqrt{3}+i$; 8) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;

9) $5{,}25-7{,}27i$; 10) $-3{,}7-2{,}6i$.

13. Užrašykite kompleksinius skaičius trigonometrine forma imdami tik pagrindinę argumento reikšmę:

1) $\sqrt{3}-i$;

2) $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

3) $-2+2i\sqrt{3}$;

4) $3-i\sqrt{7}$;

5) $2{,}5+1{,}2i$;

6) $-1{,}13-0{,}23i$;

7) $-2{,}32-5{,}63i$;

8) $-6{,}15+2{,}69i$;

9) 8;

10) -10;

11) $-7i$;

12) $4i$;

13) $1-\sqrt{2}$;

14) $(3-\sqrt{13})i$.

14. Užrašykite kompleksinius skaičius algebrine forma:

1) $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $7(\cos\pi+i\sin\pi)$;

3) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\cos 0+i\sin 0$;

5) $2(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$;

6) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

7) $16{,}7(\cos 32{,}6^\circ+i\sin 32{,}6^\circ)$;

8) $0{,}328(\cos 245^\circ+i\sin 245^\circ)$;

9) $4{,}8(\cos 163^\circ-i\sin 163^\circ)$;

10) $9{,}2(\cos 123^\circ 20'+i\sin 123^\circ 20')$.

15. Raskite kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 sandaugą, kai:

1) $z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2=5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $z_1=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{11}{15}\pi+i\sin\frac{11}{15}\pi\right)$, $z_2=8\left(\cos\frac{4}{15}\pi+i\sin\frac{4}{15}\pi\right)$;

3) $z_1=(\cos 5+i\sin 5)$, $z_2=(\cos 3+i\sin 3)$;

4) $z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

5) $z_1=(\cos 47^\circ+i\sin 47^\circ)$, $z_2=\frac{1}{5}(\cos 214^\circ+i\sin 214^\circ)$;

6) $z_1=3{,}8(\cos 62^\circ-i\sin 62^\circ)$, $z_2=10{,}2(\cos 53^\circ+i\sin 53^\circ)$;

7) $z_1=12{,}2(\cos 42{,}3°-i\sin 42{,}3°)$, $z_2=0{,}65(\cos 27{,}2°-i\sin 27{,}2°)$;

8) $z_1=2(\cos 95°+i\sin 95°)$, $z_2=6(\cos 23°-i\sin 23°)$.

16. Raskite kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 dalmenį, kai:

1) $z_1=8(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, $z_2=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$;

2) $z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$, $z_2=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$;

3) $z_1=4(\cos 140°+i\sin 140°)$, $z_2=2(\cos 50°+i\sin 50°)$;

4) $z_1=13(\cos 75°+i\sin 75°)$, $z_2=26(\cos 165°+i\sin 165°)$;

5) $z_1=5(\cos 64°+i\sin 64°)$, $z_2=\frac{1}{5}(\cos 116°-i\sin 116°)$;

6) $z_1=\frac{1}{3}(\cos 13°-i\sin 13°)$, $z_2=3(\cos 113°-i\sin 113°)$;

7) $z_1=\frac{4}{5}(\cos 123°\,17'-i\sin 123°\,17')$,

$z_2=\frac{1}{5}(\cos 48°\,17'-i\sin 48°\,17')$;

8) $z_1=4{,}25(\cos 65°\,13'-i\sin 65°13')$,

$z_2=6{,}86(\cos 25°\,13'+i\sin 26°13')$.

17. Apskaičiuokite:

1) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; 2) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}$;

3) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$; 4) $i^{105}+2i^{96}+3i^{19}$;

5) $7i^{202}-3i^{192}+5i^{75}$; 6) $4i^{104}-13i^{54}+7i^{28}$;

7) $(i^{17}+i^{15}+i^{10}-i^8+i^6)^3$; 8) $(2i^{25}+4i^{45}-5i^{13})^2$.

18. Pakelkite laipsniu:

1) $(2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))^8$; 2) $(3(\cos 45°+i\sin 45°))^4$;

3) $(\cos 36°+i\sin 36°)^5$; 4) $(\frac{1}{2}(\cos 9°-i\sin 9°))^{10}$;

5) $(\sqrt{3}-i)^9$; 6) $(-1-i)^{10}$;

7) $(5{,}25-3{,}23i)^4$; 8) $(-2{,}2+5{,}1i)^5$.

19. Užrašykite kompleksinius skaičius rodikline forma:

1) $3{,}1+3{,}2i$; 2) $-7-7i$;

3) -11; 4) $-6i$;

5) $0{,}125-0{,}425i$; 6) $0{,}23-0{,}45i$;

7) $-2{,}22-5{,}63i$; 8) $-3{,}63+1{,}72i$.

20. Užrašykite kompleksinius skaičius algebrine forma:

1) $5e^{i90°}$; 2) $2e^{i45°}$;

3) $6{,}05e^{i170°\,20'}$; 4) $2{,}32e^{i305°\,15'}$;

5) $3{,}8e^{-i75°\,12'}$; 6) $7{,}2e^{-i110°\,45'}$.

21. Atlikite veiksmus:

1) $7{,}15e^{i110°\,15'}\cdot 0{,}52e^{i63°\,54'}$;

2) $2{,}3e^{i85°\,40'}\cdot 5{,}8e^{-i121°13'}$;

3) $8{,}72e^{i121°\,13'} : 2{,}83e^{i74°25'}$;

4) $0{,}85e^{-i83°\,34'} : 0{,}53e^{-i34°\,20'}$;

5) $(3{,}2e^{i17°\,13'})^3$;

6) $(6{,}35e^{-i63°15'})^2$.

22. Ištraukite šaknį iš kompleksinių skaičių:

1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt[3]{1}$; 3) $\sqrt[3]{-1}$; 4) $\sqrt[4]{-1}$;

5) $\sqrt[6]{1}$; 6) $\sqrt[4]{4}$; 7) $\sqrt[4]{1-i}$; 8) $\sqrt[6]{1+i}$.

23. Atlikite veiksmus:

1) $\left(\frac{5+3i}{2-2i}\right)^{13}$;

2) $\left(\frac{3-4i}{3+4i}\right)^{20}$;

3) $\sqrt[5]{\frac{1+i}{1-i}}$;

4) $\sqrt[3]{\frac{2-i}{2+i}}$;

5) $(2+2i)e^{i73°}$;

6) $(-5-5i)\cdot 2e^{i15°}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^4\cdot 2(\cos 13°+i\sin 13°)$;

8) $\frac{3e^{i82°}}{\sqrt{3}(\cos 16°+i\sin 16°)}$;

9) $(2{,}8e^{i23°\,15'})^3\cdot(2-2i)^5$;

10) $(-5-5i)^3\cdot\frac{3{,}2e^{-i63°}}{2{,}7e^{i121°}}$;

11) $(1-i)^{10}+32i$;

12) $3(-1+i)^8-48$.

24. Išspręskite lygtis:

1) $x^3-125=0$;

2) $x^3+8=0$;

3) $z^3-i=0$;

4) $z^4-16=0$;

5) $x^4+7x^2+10=0$;

6) $y^4+7y^2+12=0$;

7) $x^6-9x^3+8=0$;

8) $(2x-1)^6-28(2x-1)^3+27=0$.

8.8. Atsakymai

1. 1) $\pm 2i$; 2) $\pm 3i$; 3) $\pm\frac{7i\sqrt{2}}{2}$; 4) $\pm\frac{i\sqrt{5}}{2}$; 5) $3\pm 4i$; 6) $4\pm i\sqrt{3}$; 7) $2\pm 0{,}6i$; 8) $1+\frac{2}{3}i$. **2.** 1) (3, 2); 2) (4, −3); 3) (4, 2); 4) (1, 4); 5) (2, 3); 6) (4,5, 18). **4.** 1) $2-2i$; 2) 12; 3) $0{,}2-1{,}4i$; 4) $0{,}2+0{,}9i$; 5) $\frac{1}{6}-\frac{1}{4}i$; 6) $\frac{5}{6}-\frac{2}{15}i$; 7) $3-7i$; 8) $-5+4i$; 9) $\frac{3}{4}+1\frac{1}{3}i$; 10) $1\frac{1}{10}-\frac{1}{6}i$; 11) $-1-8i$; 12) $7-4\frac{1}{6}i$.

9. 5) $27+8i$; 6) $26+2i$; 7) $0{,}4+1{,}9i$; 8) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})i$; 9) $-2i$; 10) $5-12i$. **10.** 1) $1-2i$; 2) $5-i$; 3) $-\frac{5}{3}i$; 4) $-\frac{4}{5}i$; 5) $-\frac{1}{5}+2\frac{3}{5}i$; 6) $0{,}1-2{,}3i$; 7) $\frac{1}{7}+\frac{4i\sqrt{3}}{7}$; 8) $\frac{23}{27}-\frac{10i\sqrt{2}}{27}$. **11.** 1) $\frac{10}{13}$; 2) $-\frac{30}{17}$; 3) $\frac{60}{29}-\frac{53}{29}i$; 4) $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$; 5) $\frac{27}{29}$; 6) $-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i$. **12.** 1) 5; $2\pi k$, $k\in Z$; 2) 1; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 3) 3; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 4) 7; $\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 5) $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}+$ $+2\pi k$, $k\in Z$; 6) 5; $-53°\,8'+360°k$, $k\in Z$; 7) 2; $\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 8) 2; $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; 9) 8,97; $-54°\,10'+360°k$, $k\in Z$; 10) 4,5; $-144°\,54'+360°k$, $k\in Z$; **13.** 1) $2(\cos 30°+i\sin 30°)$; 2) $\cos 120°-i\sin 120°$; 3) $4(\cos 120°+i\sin 120°)$; 4) $4(\cos 41°\,25'-$ $-i\sin 41°25')$; 5) $2{,}8(\cos 25°\,38'+i\sin 25°\,38')$; 6) $1{,}2(\cos 168°\,30'-i\sin 168°\,30')$; 7) $6{,}08(\cos 112°\,24'-i\sin 112°\,24')$; 8) $6{,}71(\cos 156°\,36'+i\sin 156°\,36')$; 9) $8(\cos 0+$ $+i\sin 0)$; 10) $10(\cos\pi+i\sin\pi)$; 11) $7(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$; 12) $4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{2}{\pi})$; 13) $(\sqrt{2}-1)(\cos 0+i\sin 0)$; 14) $(\sqrt{13}-3)(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$. **14.** 1) $4i$; 2) -7; 3) $-3i$; 4) 1; 5) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 6) $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$; 7) $14{,}1+9{,}00i$; 8) $-0{,}139-0{,}297i$; 9) $-4{,}6-1{,}4i$; 10) $-5{,}1+7{,}7i$. **15.** 1) $20i$; 2) -4; 3) $\cos 8+i\sin 8$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 5) $\frac{1}{15}(\cos 261°+i\sin 261°)$; 6) $39(\cos 9°-i\sin 9°)$; 7) $7{,}9(\cos 69{,}5°-i\sin 69{,}5°)$; 8) $2\sqrt{3}(\cos 72°+i\sin 72°)$. **16.** 1) $4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$; 2) $0{,}5(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$; 3) $2i$; 4) $-0{,}5i$; 5) -25; 6) $\frac{1}{9}i$; 7) $4(\cos 75°-i\sin 75°)$; 8) $0{,}620(\cos 90°\,26'-\sin 90°\,26')$ **17.** 1) i; 2) $-i$; 3) 0; 4) $-4i$; 5) $-10-5i$; 6) 24; 7) -27; 8) -1. **18.** 1) 256; 2) -81; 3) -1; 4) $-\frac{1}{1024}$; 5) -512; 6) $32i$; 7) $1140(\cos 126{,}4°-i\sin 126{,}4°)$; 8) $5266(\cos 206{,}7°+i\sin 206{,}7°)$. **19.** 1) $4{,}6e^{i45{,}9°}$; 2) $10e^{-i135°}$; 3) $11e^{i180°}$; 4) $6e^{-i90°}$; 5) $0{,}443e^{-i73{,}6°}$; 6) $0{,}51e^{-i62{,}9°}$; 7) $6{,}09e^{-i112{,}4°}$; 8) $4{,}02e^{i154{,}7°}$. **20.** 1) $5i$; 2) $1+i$; 3) $-5{,}97+0{,}981i$; 4) $1{,}34-1{,}89i$; 5) $0{,}98-3{,}7i$; 6) $-2{,}6-$ $-6{,}7i$. **21.** 1) $3{,}7e^{i174°\,9'}$; 2) $13e^{-i35°\,33'}$; 3) $3{,}08e^{i46°\,48'}$; 4) $1{,}6e^{-i49°\,14'}$; 5) $33e^{i51°\,39'}$; 6) $40{,}3e^{-i126°\,30'}$. **22.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; 2) 1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 3) -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$; 5) ± 1, $\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$,

$-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 6) $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$; 7) $\sqrt[8]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k\right)}$, $k=0, 1, 2, 3$; 8) $\sqrt[12]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}k\right)}$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$. **23.** 1) $12000e^{i268^\circ}$; 2) e^{i35°; 3) $e^{i(18^\circ+72^\circ k)}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; 4) $e^{i(21^\circ+120^\circ k)}$, $k=0, 1, 2$; 5) $2\sqrt{2}e^{i118^\circ}$; 6) $10e^{i240^\circ}$; 7) $2(\cos 107^\circ-i\sin 107^\circ)$; 8) $\sqrt{3}e^{i66^\circ}$; 9) $3900e^{-i155^\circ 15'}$; 10) $8{,}4e^{i41^\circ}$; 11) 0; 12) 0. **24.** 1) 5, $-\frac{5}{2}\pm\frac{5i\sqrt{3}}{2}$; 2) 2, $1\pm i\sqrt{3}$; 3) $-i$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 4) ± 2, $\pm 2i$; 5) $\pm i\sqrt{5}$, $\pm i\sqrt{2}$; 6) $\pm 2i$, $\pm i\sqrt{3}$; 7) 1, 2, $-1\pm i\sqrt{3}$; $-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 8) 1, 2, $\frac{1}{4}\pm\frac{3i\sqrt{3}}{4}$; $-\frac{1}{4}\pm\frac{3i\sqrt{3}}{4}$.

9. TIESĖS IR ANTROSIOS EILĖS KREIVĖS PLOKŠTUMOJE

9.1. Kreivės lygtis plokštumoje. Parametrinės kreivės lygtys

3.1 skyrelyje įsitikinome, kad lygtis $ax+by=c$ turi be galo daug sprendinių, kurie yra tiesėje (tiesės taškų koordinatės tenkina tą lygtį).

Nagrinėsime lygtį su dviem kintamaisiais

$$F(x, y)=0; \tag{1}$$

čia simboliu $F(x, y)$ pažymėtas reiškinys, priklausantis nuo x ir y. Pavyzdžiui, $x^2-3xy+5=0$, $x^4-x^2y^2+y^4-1=0$ yra (1) tipo lygtys.

Skaičių pora (x_0, y_0), kurią vietoj x ir y įrašę į (1) lygtį gauname teisingą skaitinę lygybę, vadinama (1) *lygties sprendiniu*. Pavyzdžiui, (1, 4) yra lygties $x^2-2y+7=0$ sprendinys.

Apskritai nagrinėjamo tipo lygtys turi be galo daug realiųjų sprendinių. Tačiau yra lygčių, kurios turi baigtinį sprendinių skaičių arba visai jų neturi. Pavyzdžiui, lygtis $x^2+y^2=0$ turi vienintelį sprendinį (0, 0), o lygtis $x^2+y^2+1=0$ neturi sprendinių (kad ir kokius skaičius x_0, y_0 imtume, vis tiek $x_0^2+y_0^2+1\neq 0$). Toliau nagrinėsime lygtis, turinčias be galo daug sprendinių.

Nagrinėsime tik tiesines lygtis su dviem kintamaisiais

$$ax+by+c=0 \tag{2}$$

ir antrojo laipsnio lygtis su dviem kintamaisiais

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (3)$$

Laikysime, kad (2) lygtyje koeficientai a ir b nelygūs nuliui, o (3) lygtyje — bent vienas iš koeficientų A, B, C nelygus nuliui.

Nagrinėjamosios lygties sprendinius galime laikyti plokštumos taškų koordinatėmis. Tie taškai plokštumoje sudaro kreivę, kuri vadinama lygties grafiku. 3.2 skyrelyje lygties $2x+3y-6=0$ sprendiniai sudaro tiesę, o 3.11 skyrelyje lygties $y-x^2-x+2=0$ sprendiniai — parabolę.

Taigi, turėdami lygtį, galime nubrėžti kreivę, kurios taškų koordinatės tenkina tą lygtį.

Ne mažiau svarbus ir atvirkštinis uždavinys. Sakykime, kad duota kreivė. Reikia rasti lygtį, kurią tenkina kiekvieno kreivės taško koordinatės, bet netenkina kitų plokštumos taškų koordinatės. Tokia lygtis vadinama nagrinėjamosios kreivės lygtimi.

Pavyzdžiai. 1. Parašysime lygtį kreivės, kurios kiekvienas taškas vienodai nutolęs nuo taškų $A(0, 2)$ ir $B(4, -2)$. Nustatysime, ar taškai $C(-1, 1)$ ir $D(1, -1)$ priklauso kreivei.

Sakykime, kad $M(x, y)$ — bet kuris nagrinėjamos kreivės taškas. Taškas M pasižymi savybe: $MA=MB$. Kadangi

$$MA=\sqrt{x^2+(y-2)^2}, \quad MB=\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2},$$

tai

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}.$$

Šios lygties abi puses pakėlę kvadratu, gauname pirmojo laipsnio lygtį: $x^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y+2)^2$, arba $x-y-2=0$. Įrašę taško C koordinates į tą lygtį, gauname: $-1-1-2=-4\neq0$. Vadinasi, taškas C duotajai kreivei nepriklauso. Taškas D kreivei priklauso, nes $1-(-1)-2=0$.

2. Parašysime lygtį kreivės, kurios kiekvieno taško atstumas nuo taško $A(-1, 1)$ du kartus mažesnis už jo atstumą nuo taško $B(-4, 4)$.

Sakykime, $M(x, y)$ — bet kuris nagrinėjamos kreivės taškas. Tuomet $MB=2MA$. Kadangi $MB=\sqrt{(x+4)^2+(y-4)^2}$, $MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$, tai

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}.$$

Šios lygties abi puses pakėlę kvadratu ir suprastinę, gauname

$$x^2+y^2-8=0.$$

Tai antrojo laipsnio lygtis.

Sakykime, įvedę naują kintamąjį, pavyzdžiui t, (1) lygtį galime suskaidyti į dvi lygtis

$$x=f(t), \quad y=g(t). \qquad (4)$$

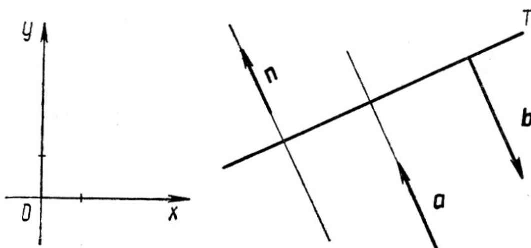
(4) lygtys vadinamos *kreivės parametrinėmis lygtimis*, jeigu iš jų eliminavus t gaunama (1) lygtis. Kintamasis t vadinamas *parametru*. Pavyzdžiui, lygtį $2x+5y-7=0$ galime užrašyti parametrine forma šitaip: $x=5t+3{,}5$, $y=-2t$ arba $x=\frac{1}{2}t^2+3{,}5$, $y=-\frac{1}{5}t^2$.

Kaip matyti iš nagrinėto pavyzdžio, (1) lygtį galima įvairiais būdais užrašyti parametrine forma.

9.2. Bendroji tiesės lygtis

Sakykime, plokštumoje duota Dekarto stačiakampė koordinačių sistema (koordinačių ašyse žymėsime tik vienetinių vektorių pabaigos taškus).

Vektorius **n** vadinamas *statmenu tiesei* T, jeigu tiesė T ir tiesė, kurioje yra vektorius **n**, susikerta stačiuoju kampu. 246 paveiksle vektoriai **n**, **a**, **b** yra statmeni tiesei T.



246 pav.

Vektorius **n**, statmenas tiesei T, vadinamas tiesės *normalės vektoriumi*, arba *normaliniu vektoriumi*.

1 teorema. *Kiekviena plokštumos tiesė išreiškiama pirmojo laipsnio lygtimi.*

Į r o d y m a s. Tiesė plokštumoje yra visiškai nusakyta, jeigu nurodytas taškas $M_0(x_0, y_0)$, per kurį ji eina, ir vektorius $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}$, statmenas tai tiesei (247 pav.).

Akivaizdu, kad taškas $M(x, y)$ priklauso tiesei tada ir tik tada, kai vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ yra statmenas vektoriui **n**, t. y. kai

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (1)$$

Kadangi $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}$, tai iš (1) lygybės išplaukia

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (2)$$

Tai tiesės T lygtis. Atlikę veiksmus ir skaičių $-Ax_0-By_0$ pažymėję raide C, gauname šitokią tiesės T lygtį:

$$\boxed{Ax+By+C=0.} \qquad (3)$$

2 teorema. (Atvirkštinė.) *Kiekviena pirmojo laipsnio lygtis yra tiesės lygtis.*

Įrodymas. Nagrinėsime (3) lygtį, kurioje A ir B kartu nelygūs nuliui. Ji turi be galo daug sprendinių. Sakykime, $M_0(x_0, y_0)$ yra šios lygties sprendinys, t. y.

$$Ax_0+By_0+C=0. \quad (4)$$

Iš (3) lygties atėmę (4) tapatybę, gauname lygtį

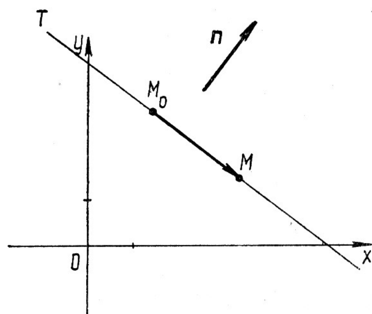
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \quad (5)$$

ekvivalenčią (3) lygčiai.

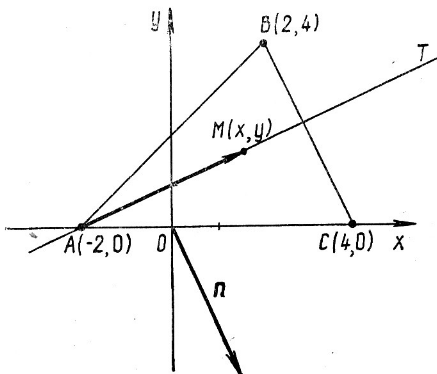
Jeigu $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}$, tai (5) lygtis ekvivalenti (1) lygybei, t. y. taškas $M(x, y)$, kurio koordinatės tenkina (5) lygybę, priklauso tiesei T.

Pavyzdžiai. 1. Užrašysime lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(3, -4)$ ir statmenos vektoriui $\mathbf{n}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$.

Remdamiesi (2) lygtimi, gauname $2(x-3)+(-3)(y+4)=0$ arba $2x-3y-18=0$.



247 pav.



248 pav.

2. Duotas trikampis, kurio viršūnės $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$ ir $C(4, 0)$. Sudarysime lygtį tiesės, einančios per viršūnę A ir statmenos tiesei BC (trikampio aukštinės lygtis) (248 pav.).

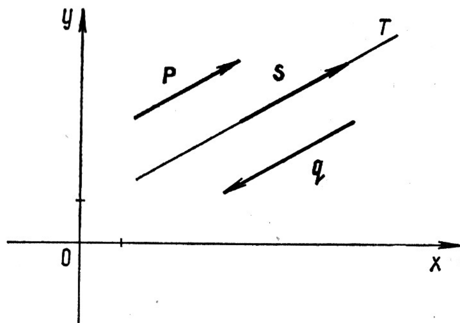
Tiesė T turi būti statmena vektoriui $\mathbf{n}=\overrightarrow{BC}=(4-2)\mathbf{i}+(0-4)\mathbf{j}=$ $=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$. Jeigu $M(x, y)$ — bet kuris tos tiesės taškas, tai vektorius $\overrightarrow{AM}=(x+2, y)$ turi būti statmenas vektoriui $\mathbf{n}$, t. y. $2(x+2)-4y=0$ arba $x-2y+2=0$.

9.3. Lygtis tiesės, einančios per duotąjį tašką ir lygiagrečios duotajam vektoriui

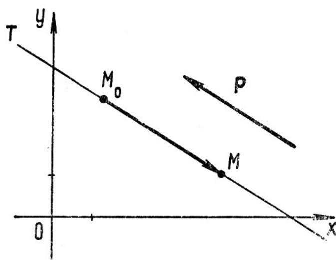
Tiesė T vadinama *lygiagrečia vektoriui* $\mathbf{p}$, jeigu tiesė T ir tiesė, kurioje yra vektorius $\mathbf{p}$, yra lygiagrečios. 249 paveiksle tiesė T lygiagreti vektoriams $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{s}$.

Vektorius **p**, kuriam lygiagreti tiesė T, vadinamas tiesės T *krypties vektoriumi*.

Sudarysime tiesės, einančios per tašką $M_0(x_0, y_0)$ ir lygiagrečios vektoriui $\mathbf{p}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}$ (250 pav.) lygtį. Taškas $M(x, y)$ priklauso tai



249 pav.



250 pav.

tiesei tada ir tik tada, kai vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ yra kolinearus vektoriui **p**. Vektoriai $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}$ ir $\mathbf{p}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}$ yra kolinearūs, kai

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}=0,$$

arba

$$\boxed{m(x-x_0)-l(y-y_0)=0.} \qquad (1)$$

Tai ir yra nagrinėjamos tiesės lygtis.

Kai vektoriaus **p** nė viena koordinatė nelygi nuliui ($l\neq 0$, $m\neq 0$), (1) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.} \qquad (2)$$

(2) lygtis vadinama tiesės *kanonine lygtimi*.

Iš vektorių $\overrightarrow{M_0M}$ ir **p** kolinearumo išplaukia lygybė

$$\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{p}, \quad t \text{ — realusis skaičius.}$$

Sulyginę atitinkamas šių vektorių koordinates, gauname:

$$\begin{cases} x-x_0=tl, \\ y-y_0=tm, \end{cases}$$

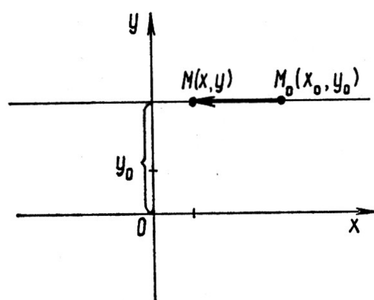
arba

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+tl, \\ y=y_0+tm. \end{cases}} \qquad (3)$$

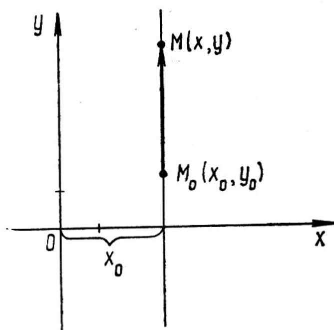
(3) sistema vadinama tiesės *parametrinėmis lygtimis.*

Išnagrinėsime atskirus tiesės padėties koordinačių ašių atžvilgiu atvejus.

1) Tiesė T eina per tašką $M_0(x_0, y_0)$ ir yra lygiagreti ašiai Ox (251 pav.).



251 pav.



252 pav.

Ašies Ox krypties vektorius yra $\mathbf{i}=(1, 0)$. Todėl iš (1) lygties gauname:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0, \text{ arba } y-y_0=0.$$

Taigi $y=y_0$ yra lygtis tiesės, lygiagrečios ašiai Ox. Kai $y_0=0$, gauname ašies Ox lygtį: $y=0$.

2) Tiesė T eina per tašką $M_0(x_0, y_0)$ ir yra lygiagreti ašiai Oy (252 pav.).

Kadangi ašies Oy krypties vektorius yra $\mathbf{j}=(0, 1)$, tai iš (1) lygties išplaukia:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ arba } x-x_0=0.$$

Tai tiesės, lygiagrečios ašiai Oy lygtis. Kai $x_0=0$, gauname ašies Oy lygtį: $x=0$.

Pavyzdžiai. 1. Parašysime lygtį tiesės, einančios per tašką $M(-3, 1)$ ir lygiagrečios vektoriui $\mathbf{p}=(2, -3)$.

Pagal (2) formulę

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}, \text{ arba } 3x+2y+7=0.$$

2. Parašysime parametrines lygtis tiesės, einančios per tašką $M(2, -5)$ ir lygiagrečios vektoriui $\mathbf{p}=(-1, 4)$.

Iš (3) lygčių išplaukia, kad

$$\begin{cases} x=2-t, \\ y=-5+4t. \end{cases}$$

9.4. Tiesės bendrosios lygties tyrimas

9.2 skyrelyje įrodėme, kad kiekviena tiesė užrašoma pirmojo laipsnio lygtimi ir atvirkščiai: kiekvienos pirmojo laipsnio lygties

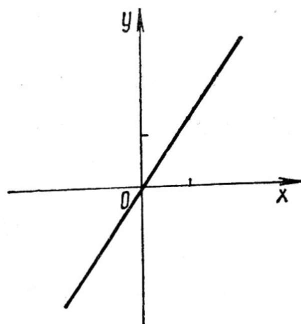
$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

(čia A ir B kartu nelygūs nuliui) sprendiniai sudaro tiesę. Panagrinėkime, kaip keičiasi tiesės padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu, kintant A, B ir C reikšmėms.

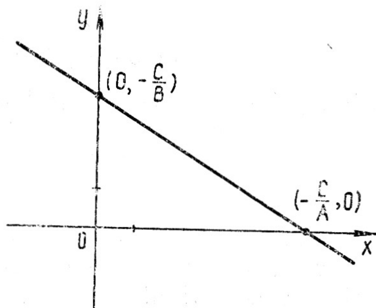
1) Jeigu $A=0, B\neq0$, tai (1) lygtis yra $By+C=0$, arba $y=-\frac{C}{B}$. Tai tiesės, lygiagrečios ašiai Ox, lygtis.

2) Jeigu $B=0, A\neq0$, tai (1) lygtis yra $Ax+C=0$, arba $x=-\frac{C}{A}$. Tai tiesės, lygiagrečios ašiai Oy, lygtis.

3) Jeigu $C=0$, tai (1) lygtis virsta lygtimi $Ax+By=0$. Ši tiesė eina per koordinačių pradžią $O(0, 0)$ (jos lygtį tenkina taško O koordinatės) (253 pav.).



253 pav.



254 pav.

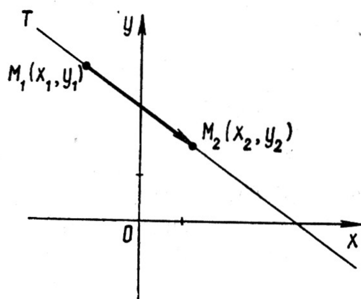
4) Kai $A=0$, $C=0$, gauname lygtį $By=0$, arba $y=0$. Tai ašies Ox lygtis.

5) Kai $B=0$, $C=0$, gauname lygtį $Ax=0$, arba $x=0$. Tai ašies Oy lygtis.

6) Kai $A\neq0$, $B\neq0$ ir $C\neq0$, tiesė neina per koordinačių pradžią ir nelygiagreti nei ašiai Ox, nei ašiai Oy. Ji eina per du taškus $\left(0,-\frac{C}{B}\right)$ ir $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ (254 pav.).

9.5. Lygtis tiesės, einančios per du duotuosius taškus

Tiesės padėtį plokštumoje galima nusakyti nurodžius du skirtingus jos taškus $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$. Vektorius $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ lygiagretus duotajai tiesei (255 pav.). Taigi gavome nagrinė-



255 pav.

tą atvejį, kai reikia parašyti lygtį tiesės, einančios per tašką $M_1(x_1, y_1)$ ir lygiagrečios vektoriui $\overrightarrow{M_1M_2}$. Remdamiesi 9.3 skyrelio (1) formule, gauname:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Jeigu $x_2-x_1\neq0$ ir $y_2-y_1\neq0$ (tiesė nelygiagreti koordinačių ašims), tai (1) lygtis ekvivalenti šitokiai:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2)$$

(1) ir (2) lygtys vadinamos *tiesės, einančios per du duotuosius taškus*, lygtimis.

Pavyzdys. Parašykime lygtį tiesės, einančios per du taškus: a) $M_1(-3, 2)$ ir $M_2(1, -4)$; b) $M_1(4, 2)$ ir $M_2(-5, 2)$.

a) Į (2) lygtį įrašę tų taškų koordinates, gauname

$$\frac{x+3}{1+3}=\frac{y-2}{-4-2}, \text{ arba } 3x+2y+5=0.$$

b) Kadangi $y_1=y_2=2$, tai $y_2-y_1=0$. Į (1) lygtį įrašę duotųjų taškų koordinates, turime:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}=0, \text{ arba } y-2=0.$$

9.6. Tiesės ašinė lygtis

Sakykime, duoti du koordinačių ašių taškai $M_1(a, 0)$ ir $M_2(0, b)$ (256 pav.). Rasime lygtį tiesės, einančios per tuos taškus. Į 9.5 skyrelio (2) lygtį įrašę duotųjų taškų koordinates, gauname:

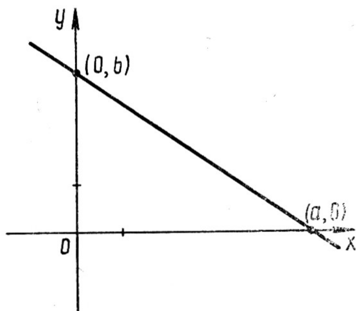
$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

arba

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.} \qquad (1)$$

Ši lygtis vadinama tiesės *ašine lygtimi*, nes skaičiai a ir b nurodo, kokias atkarpas koordinačių ašyse atkerta tiesė.

Žinodami ašinę tiesės lygtį, lengvai galime nubrėžti tiesę.



256 pav.

Pavyzdžiai. 1. Parašykime lygtį tiesės, kuri koordinačių ašyse atkerta atkarpas: 1) $a=2$, $b=5$; 2) $a=-0{,}5$, $b=3$.

Į (1) lygtį įrašę a ir b reikšmes, gauname:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$, arba $5x+2y-10=0$ (257 pav.);

2) $\frac{x}{-0{,}5}+\frac{y}{3}=1$, arba $6x-y+3=0$ (258 pav.).

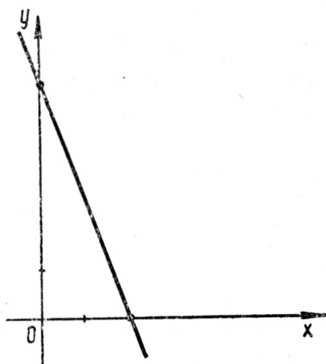
2. Rasime tiesės, kurios lygtis yra $3x-4y-12=0$, susikirtimo su koordinačių ašimis taškus. Tiesės lygtį padaliję iš 12 ir pertvarkę, gauname ašinę lygtį: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$. Vadinasi, nagrinėjamoji tiesė koordinačių ašis kerta taškuose $A(4, 0)$ ir $B(0, -3)$.

3. Parašykime lygtį tiesės, kuri eina per tašką $M_0(-2, 3)$ ir koordinačių teigiamose pusašėse atkerta vienodo ilgio atkarpas.

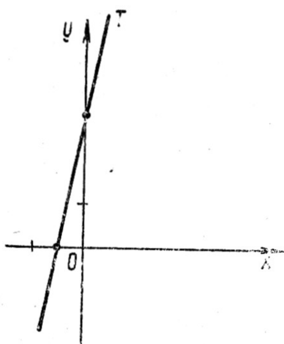
Kadangi tiesė teigiamose pusašėse atkerta vienodo ilgio atkarpas, tai jos ašinė lygtis yra

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1.$$

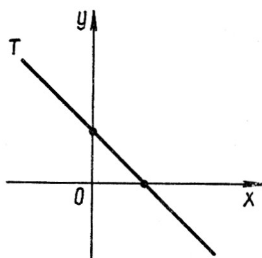
Šią lygtį turi tenkinti taško M_0 koordinatės: $\frac{-2}{a}+\frac{3}{a}=1$. Iš čia gauname $a=1$. Vadinasi, ieškomosios tiesės lygtis yra $x+y-1=0$ (259 pav.).



257 pav.



258 pav.



259 pav.

9.7. Lygtis tiesės, einančios per duotąjį tašką, kai žinomas krypties koeficientas

Sakykime, plokštumos tiesė T eina per žinomą tašką $M_0(x_0, y_0)$ ir yra lygiagreti vektoriui $\mathbf{p}=(l, m)$ (260 pav.). Jeigu tiesė T ašį Ox kerta taške N, tai kampą α, kuriuo reikia sukti ašį Ox apie tašką N prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį, kad ašis Ox sutaptų su T, vadinsime *kampu tarp T ir Ox.*

Kampo α tarp T ir ašies Ox tangentą vadinsime *tiesės T krypties koeficientu* ir žymėsime k:

$$k=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Jeigu $\alpha=0$, tai $k=0$. Jeigu $\alpha=90°$, tai $\operatorname{tg}\alpha$ neapibrėžtas ir tokia tiesė krypties koeficiento neturi.

Iš stačiojo trikampio OAP gauname

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{l}. \qquad (2)$$

Taigi tiesės krypties koeficientas lygus tos tiesės krypties vektoriaus ordinatės ir abscisės dalmeniui.

Tiesės, einančios per tašką $M_0(x_0, y_0)$ ir lygiagrečios vektoriui $\mathbf{p} = (l, m)$ kanoninė lygtis (žr. 339 p., (2) lygtį) yra

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}.$$

Šią lygtį padauginę iš m ir pasinaudoję (2) formule, gauname

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).} \qquad (3)$$

Tai lygtis tiesės, einančios per tašką $M_0(x_0, y_0)$ ir turinčios krypties koeficientą k. Ši tiesė nėra lygiagreti ašiai Oy, todėl ją kerta kokiame nors taške $B(0, b)$ (256 pav.). Į (3) lygtį vietoje taško M_0 koordinačių įrašę taško B koordinates, gauname

$$\boxed{y=kx+b.} \qquad (4)$$

(4) lygtis vadinama tiesės *kryptine lygtimi*.

Remiantis (2) formule, nesunku rasti krypties koeficientą tiesės, einančios per du taškus $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$. Tokios tiesės krypties vektorius yra $\mathbf{p}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ ir

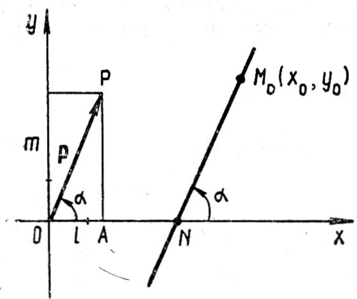
$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (5)$$

Pavyzdžiai. 1. Sudarykime lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(\sqrt{3}, -4)$ ir su ašimi Ox sudarančios 120° kampą.

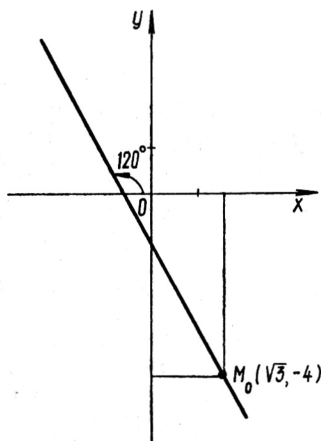
Kadangi $\alpha=120°$, tai $k=\operatorname{tg}120°=-\sqrt{3}.$ Remdamiesi (3) lygtimi, gauname

$$y+4=\sqrt{3}(x-\sqrt{3}) \quad \text{arba} \quad \sqrt{3}x+y+1=0.$$

Tiesė pavaizduota 261 paveiksle.



260 pav.



261 pav.

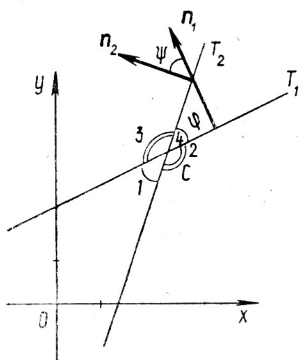
2. Tiesė eina per tašką $M_0(2, -5)$, jos krypties koeficientas $k=\frac{3}{5}$. Parašysime tos tiesės lygtį.

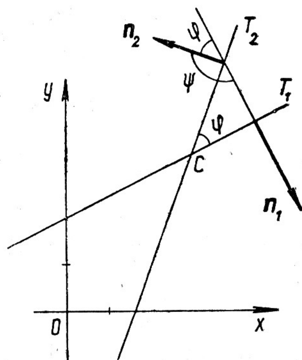
Į (3) lygtį įrašę $k=\frac{3}{5}$, $x_0=2$, $y_0=-5$, gauname

$$y+5=\frac{3}{5}(x-2), \text{ arba } 3x-5y-31=0.$$

9.8. Kampas tarp tiesių. Tiesių lygiagretumas ir statmenumas

Imkime dvi susikertančias tieses T_1 ir T_2. Jų spinduliai, išeinantys iš susikirtimo taško C, sudaro dvi kampų poras: $\angle 1$, $\angle 3$ ir $\angle 2$, $\angle 4$. *Kampu tarp tiesių* T_1 ir T_2 vadinsime smailųjį kampą tarp spindulių, t. y. kampą φ (262 pav.).





262 pav.

Jeigu tiesės T_1 ir T_2 aprašytos bendrosiomis lygtimis, tai paprasčiausia skaičiuoti kampą tarp tų tiesių normalinių vektorių.

Jeigu tiesės T_1 ir T_2 aprašytos kryptinėmis lygtimis, tai kampą tarp jų paprasčiausia išreikšti kampų, sudaromų su ašimi Ox, tangentais. Nagrinėsime abu atvejus.

I. *Tiesės T_1 ir T_2 aprašytos bendrosiomis lygtimis:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ ir } A_2x+B_2y+C_2=0. \quad (1)$$

Tiesės T_1 normalinis vektorius yra $\mathbf{n}_1=(A_1, B_1)$, o tiesės T_2 — $\mathbf{n}_2=(A_2, B_2)$. Sakykime, kampas tarp tiesių T_1 ir T_2 yra φ, o tarp tų tiesių normalinių vektorių — ψ. Galimi du atvejai: a) $\varphi=\psi$ (262 pav., *a*); b) $\varphi=180°-\psi$ (262 pav., *b*). Abiem atvejais

$$\cos\varphi=|\cos\psi|.$$

Remdamiesi 6.8 skyrelio kampo tarp plokštumos vektorių kosinuso formule, gauname

$$\cos(\widehat{T_1, T_2}) = |\cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \quad (2)$$

Tiesės T_1 ir T_2, kurių normaliniai vektoriai $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2)$, yra:

1) lygiagrečios tada ir tik tada, kai vektoriai $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ yra kolinearūs, t. y. kai

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \text{ arba } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \quad (3)$$

2) statmenos tada ir tik tada, kai vektoriai $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ yra statmeni, t. y. kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui:

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \quad (4)$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime kampą tarp tiesių, aprašytų šiomis lygtimis: $x+5y-7=0$ ir $2x-3y-5=0$; 2) $x-5=0$ ir $2x+2y-7=0$.

Kadangi $\mathbf{n}_1 = (1, 5)$ ir $\mathbf{n}_2 = (2, -3)$, tai remdamiesi (2) formule gauname

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2+5\cdot(-3)|}{\sqrt{1^2+5^2}\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Iš čia išplaukia, kad $\varphi=45°$.

2) Kadangi $\mathbf{n}_1 = (1, 0)$ ir $\mathbf{n}_2 = (2, 2)$, tai

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2+0\cdot 2|}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi=45°.$$

2. Nustatysime, kurios tiesių poros yra statmenos ar lygiagrečios:

1) $3x-2y+7=0$ ir $6x-4y-9=0$;
2) $6x-4y-9=0$ ir $6x+4y-5=0$;
3) $3x-2y-7=0$ ir $2x+3y-6=0$.

1) Kadangi $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0,$

tai šios tiesės yra lygiagrečios;

2) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ ir $A_1A_2+B_1B_2=6\cdot 6+4\cdot(-4)\neq 0,$

taigi šios tiesės nei statmenos, nei lygiagrečios;

3) $A_1A_2+B_1B_2=3\cdot 2+(-2)\cdot 3=0$ — tiesės statmenos.

Jeigu tiesės, aprašytos (1) lygtimis, turi bendrą tašką, tai to taško koordinatės turi tenkinti abi lygtis. Vadinasi, norint rasti dviejų tiesių bendrąjį tašką, reikia spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases} \quad (5)$$

(5) sistema turi vienintelį sprendinį, kai

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(tiesės nelygiagrečios):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

Jeigu

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

tai tiesės yra lygiagrečios. Šiuo atveju (5) sistema turi be galo daug sprendinių, kai

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \text{ (tiesės sutampa)},$$

ir neturi sprendinių, kai

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

3. Rasime šių tiesių susikirtimo tašką:

1) $x+5y+9=0$ ir $2x-3y+1=0$;

2) $2x-3y+1=0$ ir $2x-3y+5=0$;

3) $3x+5y-2=0$ ir $6x+10y-4=0$.

1) Kadangi

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13 \neq 0,$$

tai tiesės nėra lygiagrečios. Jų susikirtimo tašką rasime naudodamiesi (6) formulėmis:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -9 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{-13}=\frac{32}{-13}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-13}=\frac{17}{-13}.$$

Taigi tiesės kertasi taške $\left(-\frac{32}{13}, -\frac{17}{13}\right)$;

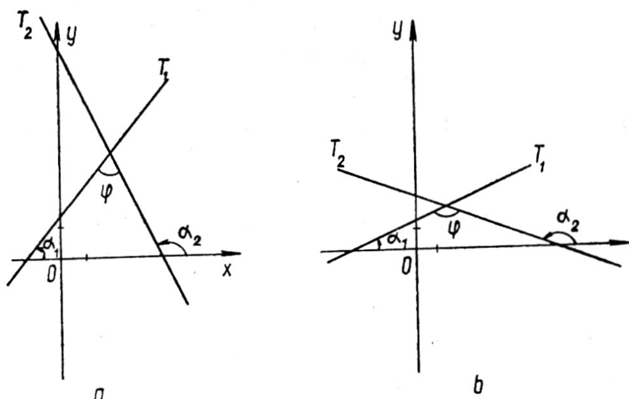
2) Kadangi $\frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{1}{5}$, tai tiesės yra lygiagrečios ir nesikerta;

3) Kadangi $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\frac{-2}{-4}$, tai tiesės sutampa ir turi be galo daug bendrų taškų.

II. *Tiesės T_1 ir T_2 aprašytos kryptinėmis lygtimis*

$$y=k_1x+b_1 \text{ ir } y=k_2x+b_2. \quad (7)$$

Sakykime, tiesė T_1 su ašimi Ox sudaro kampą α_1, o T_2 — kampą $\alpha_2 (\alpha_2>\alpha_1)$. Jeigu kampas tarp tiesių T_1 ir T_2 yra φ, tai galimi du



263 pav.

atvejai: a) $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ (263 pav., *a*); b) $\varphi=\pi-(\alpha_2-\alpha_1)$ (263 pav., *b*).

Abiem atvejais

$$\operatorname{tg}\varphi=|\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)|=\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}\right|. \quad (8)$$

Kadangi $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$, o $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$, tai (8) lygybę galime užrašyti šitaip:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|.} \quad (9)$$

Iš (9) formulės išplaukia, kad tiesės, kurių krypties koeficientai k_1 ir k_2, yra:

1) lygiagrečios tada ir tik tada, kai

$$\boxed{k_1=k_2;} \quad (10)$$

2) statmenos tada ir tik tada, kai

$$\boxed{1+k_1\cdot k_2=0.} \quad (11)$$

Pavyzdys. Rasime kampą tarp tiesių:

a) $y=3x+4$ ir $y=3x-2$;

b) $y=\sqrt{3}x-7$ ir $y=-\sqrt{3}x+5$;

c) $y=-\frac{1}{4}x+3$ ir $y=4x-1$;

d) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{\sqrt{3}}$ ir $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-\sqrt{3}}$.

Sprendimas. a) Kadangi $k_1=k_2=3$, tai tiesės yra lygiagrečios.

b) Įrašę $k_1=\sqrt{3}$ ir $k_2=-\sqrt{3}$ reikšmes į (9) formulę, gauname

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right|=\sqrt{3},\quad \varphi=60^\circ.$$

c) Kadangi $k_1\cdot k_2+1=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1=0$, tai tiesės yra statmenos ir kampas $\varphi=90^\circ$.

d) Remdamiesi 9.7 skyrelio (2) formule, apskaičiuojame tiesių krypčių koeficientus:

$$k_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{ir}\ k_2=\frac{-\sqrt{3}}{3}.$$

Įrašę tas reikšmes į (9) formulę, gauname

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|=\sqrt{3},\quad \varphi=60^\circ.$$

Kad geriau įsimintume tiesių, aprašytų įvairiomis lygtimis, tarpusavio padėtį, sudarome lentelę:

Tiesių lygtys	Kampas tarp tiesių	Statmenumo sąlyga	Lygiagretumo sąlyga
$A_1x+B_1y+C_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$	$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	A_1A_2+ $+B_1B_2=0$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$
$y=k_1x+b_1$ $y=k_2x+b_2$	$\operatorname{tg}\varphi=\left\lvert\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right\rvert$	$1+k_1k_2=0$	$k_1=k_2$

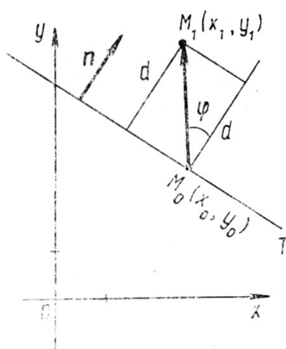
9.9. Taško atstumas iki tiesės

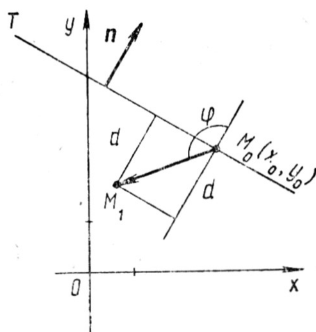
Imkime tiesę $Ax+By+C=0$ ir tašką $M_1(x_1, y_1)$ (264 pav., *a*, *b*). Pasirinkime tiesėje bet kurį tašką $M_0(x_0, y_0)$. Šio taško koordinatės tenkina tiesės lygtį, t. y.

$$Ax_0+By_0+C=0. \tag{1}$$

Jeigu taškas P yra statmens, išvesto iš taško M_1 į tiesę, pagrindas, tai taško M_1 atstumas iki tiesės lygus (žr. 264 pav., *a*, *b*)

$$d=M_1P=|\overrightarrow{M_0M_1}|\cdot|\cos\varphi|. \tag{2}$$





264 pav.

Pasinaudoję 6.8 skyrelio kampo tarp dviejų vektorių kosinuso (9) formule, iš (2) lygybės gauname

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}|\cdot|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\mathbf{n}|}{|\overrightarrow{M_0M_1}|\cdot|\mathbf{n}|}=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1+(-Ax_0-By_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3)$$

Iš (1) bei (3) lygybių išplaukia

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.} \qquad (4)$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime taško $M(1, -3)$ atstumą nuo tiesės $x+4y-2=0$.

Į (4) formulę įrašę taško M koordinates $x_1=1$ ir $y_1=-3$, gauname

$$d=\frac{|1\cdot1+4\cdot(-3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|1-12-2|}{\sqrt{25}}=\frac{13}{5}.$$

2. Apskaičiuosime atstumą tarp lygiagrečių tiesių $x-2y+4=0$ ir $2x-4y+9=0$.

Norint rasti atstumą tarp dviejų lygiagrečių tiesių, užtenka vienoje tiesėje pasirinkti kokį nors tašką ir rasti to taško atstumą iki kitos tiesės. Taškas $M_1(0, 2)$ yra tiesėje $x-2y+4=0$, nes $0-2\cdot2+$ $+4=0$, ir jo atstumas nuo tiesės $2x-4y+9=0$ lygus

$$d=\frac{|2\cdot0-4\cdot2+9|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

3. Rasime taško N, simetriško taškui $M(-2, 3)$ tiesės $3x-4y+$ $+12=0$ atžvilgiu, koordinates.

Sakykime, kad taško N koordinatės yra $N(x_1, y_1)$. Taškas N priklauso tiesei T, einančiai per tašką M statmenai duotajai tiesei. Jei-

gu P — duotosios tiesės ir tiesės T sankirtos taškas, tai $MP=PN$. Taigi, žinodami taško P koordinates, rasime ir taško N koordinates.

Užrašykime tiesės T parametrines lygtis (žr. 339 p., (3)):

$$\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=3-4t. \end{cases}$$

Tiesės T taškas priklauso duotajai tiesei, kai

$$3(-2+3t)-4(3-4t)+12=0,$$

t. y. kai $t=\frac{6}{25}$. Įrašę rastąją t reikšmę į tiesės T parametrines lygtis, gauname taško P koordinates:

$$x=-2+3\cdot\frac{6}{25}=-\frac{32}{25},\quad y=3-4\cdot\frac{6}{25}=\frac{51}{25}.$$

Naudodamiesi 6.6 skyrelio (3) formulėmis, randame taško N koordinates:

$$-\frac{32}{25}=\frac{-2+x_1}{2},\quad \frac{51}{25}=\frac{3+y_1}{2},$$

arba $x_1=-\frac{14}{25}$, $y_1=\frac{27}{25}$. Taigi taško N koordinatės yra $N\left(-\frac{14}{25}, \frac{27}{25}\right)$.

9.10. Apskritimas

Apskritimu vadinama kreivė, kurios kiekvienas taškas vienodai nutolęs nuo duotojo taško, vadinamo apskritimo *centru.*

Jeigu taškas C — apskritimo centras, o M — bet kuris to apskritimo taškas, nutolęs nuo C atstumu R, vadinamu apskritimo *spinduliu*, tai $CM=R$, arba

$$CM^2=R^2. \tag{1}$$

(1) lygybė yra spindulio R apskritimo, kurio centras — taškas C, lygtis.

Plokštumoje pasirinkime koordinačių sistemą ir tašką $C(a, b)$ — spindulio R apskritimo centrą bei $M(x, y)$ — bet kurį to apskritimo tašką (265 pav.). Pasinaudoję (1) lygybe, gauname

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.} \tag{2}$$

(2) lygtį tenkina kiekvieno apskritimo taško koordinatės ir netenkina apskritimui nepriklausančių taškų koordinatės. Atvirkščiai, kiekvienas taškas $M(x, y)$, kurio koordinatės tenkina (2) lygtį, priklauso apskritimui, nes jo atstumas nuo taško $C(a, b)$ lygus R.

Jeigu apskritimo centras C sutampa su koordinačių pradžia ($a=0$, $b=0$), tai jo lygtis yra

$$\boxed{x^2+y^2=R^2.} \tag{3}$$

(3) lygtis vadinama *kanonine* apskritimo lygtimi.

Pavyzdžiai. 1. Parašysime lygtį apskritimo, kurio centras $C(3, -2)$, o spindulys $R=5$.

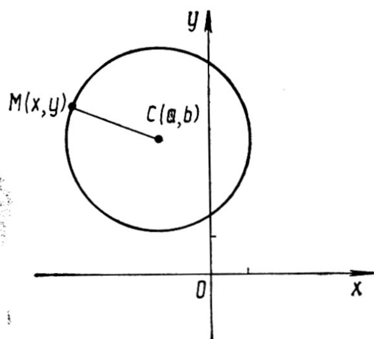
Įrašę taško C koordinates ir spindulio reikšmę į (2) lygtį, turime

$$(x-3)^2+(y-(-2))^2=5^2,$$

arba

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25.$$

2. Apskritimas eina per tašką $M(4, -3)$, jo centras yra $C(-2, 5)$. Parašysime to apskritimo lygtį.



265 pav.

Apskritimo spindulys lygus atstumui tarp taškų M ir C, t. y.

$$R=\sqrt{(-2-4)^2+(5-(-3))^2}=\sqrt{100}=10.$$

Įrašę į (2) lygtį taško C koordinates ir spindulio R reikšmę, gauname

$$(x+2)^2+(y-5)^2=100.$$

3. Apskritimo centras yra taškas $C(3, -1)$. Apskritimas liečia tiesę $3x-4y-6=0$. Parašysime jo lygtį.

Kadangi apskritimas liečia tiesę, tai spindulys lietimosi taške yra statmenas duotajai tiesei. Vadinasi, apskritimo spindulys R lygus taško $C(3, -1)$ atstumui iki tiesės $3x-4y-6=0$:

$$R=\frac{3\cdot3-4\cdot(-1)-6}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{7}{5}.$$

Taigi ieškomoji lygtis yra

$$(x-3)^2+(y+1)^2=\frac{49}{25}.$$

4. Įrodysime, kad plokštumos taškai, kurių koordinatės tenkina lygtį $x^2+y^2+9x-4y-3=0$, priklauso apskritimui.

Sugrupuojame lygties narius su kintamaisiais x ir y, o laisvąjį narį perkeliame į dešiniąją lygties pusę:

$$(x^2+9x)+(y^2-4y)=3.$$

Gautosios lygties kairiąją pusę papildome iki pilnųjų kvadratų sumos, prie abiejų jos pusių pridėję po 20,25 ir 4:

$$(x^2+9x+20{,}25)+(y^2-4y+4)=3+20{,}25+4.$$

Gauname lygtį

$$(x+4{,}5)^2+(y-2)^2=27{,}25,$$

ekvivalenčią duotajai. Vadinasi, ją tenkina apskritimo, kurio centras $C(-4{,}5,\ 2)$, o spindulys $R=\sqrt{27{,}25}$, taškų koordinatės.

5. Parašysime lygtį apskritimo, kuris eina per taškus $A(-8,\ 3)$, $B(2,\ -7)$ ir kurio centras yra tiesėje $x+4y+16=0$.

Sakykime, kad $C(a,\ b)$ — to apskritimo centras. Tada $AC^2=BC^2$ arba

$$(a+8)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b+7)^2 \Leftrightarrow a-b+1=0.$$

Kadangi apskritimo centras yra tiesėje $x+4y+16=0$, tai jo koordinatės tenkina tą lygtį: $a+4b+16=0$. Centro koordinates rasime išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} a-b+1=0, \\ a+4b+16=0. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinys yra $a=-4$, $b=-3$. Taigi apskritimo centras yra $C(-4,\ -3)$. Dabar rasime R^2:

$$R^2=AC^2=(-4+8)^2+(-3-3)^2=16+36=52.$$

Ats. Ieškomoji apskritimo lygtis yra

$$(x+4)^2+(y+3)^2=52.$$

9.11. Elipsė

9.11.1. Elipsės lygtis. Ekscentricitetas. *Elipse* vadinama kreivė, kurios kiekvieno taško atstumų iki dviejų duotųjų taškų suma yra pastovi.

Duotieji taškai vadinami elipsės *židiniais*, o atstumas tarp jų — *atstumu* tarp židinių. Elipsės židinius žymėsime F_1 ir F_2, o atstumą tarp jų — $F_1F_2=2c$.

Jeigu taškas M priklauso elipsei, tai jo atstumų iki židinių suma MF_1+MF_2 yra pastovi (266 pav.). Tarkime, kad ši suma lygi $2a$:

$$MF_1+MF_2=2a. \qquad (1)$$

Kadangi trikampio F_1MF_2 dviejų kraštinių suma didesnė už trečiąją kraštinę, tai $F_1M+F_2M>F_1F_2$, arba $2a>2c$. Vadinasi, $a>c$.

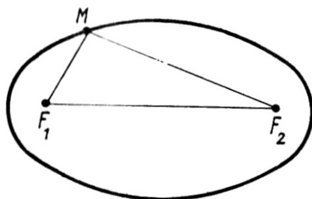
Pasirinkime koordinačių sistemą taip, kad abu židiniai būtų abscisių ašyje, o koordinačių pradžia O — atkarpos F_1F_2 viduryje (267 pav.). Tada židinių koordinatės bus $F_1(-c,\ 0)$ ir $F_2(c,\ 0)$. Jeigu $M(x,\ y)$ — bet kuris elipsės taškas, tai

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}, \qquad F_2M=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}. \qquad (2)$$

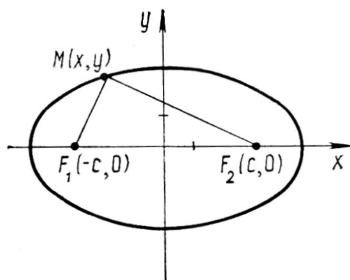
Remdamiesi (2) išraiškomis, (1) lygybę galime užrašyti šitaip:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (3)$$

(3) lygtis ir yra nagrinėjamos elipsės lygtis. Norėdami šią lygtį supaprastinti, kairiosios pusės antrąjį narį perkeliame į dešiniąją pusę.



266 pav.



267 pav.

Po to abi lygties puses pakeliame kvadratu, sutraukiame panašiuosius narius, suprastiname iš 4 ir gauname lygtį

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx. \tag{4}$$

Šią lygtį pakėlę kvadratu ir sutraukę panašiuosius narius, gauname

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{5}$$

Kadangi $a>c$, tai $a^2>c^2$. Teigiamąjį skirtumą a^2-c^2 pažymėkime b^2:

$$a^2-c^2=b^2. \tag{6}$$

Tada (5) lygtį galime užrašyti šitaip:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. \tag{7}$$

Abi (7) lygties puses padaliję iš a^2b^2, gauname

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{8}$$

Tai *kanoninė* elipsės lygtis.

(8) lygtis yra (2) lygties išvada. Todėl bet kurio elipsės taško $M(x, y)$ koordinatės tenkina ir (8) lygtį.

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: jeigu taško $N(x, y)$ koordinatės tenkina (8) lygtį, tai taškas N yra elipsės taškas.

Kadangi (8) lygties kairiojoje pusėje abu dėmenys neneigiami, o jų suma lygi 1, tai

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1 \text{ ir } \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, \text{ arba } |x|\leqslant a \text{ ir } |y|\leqslant b.$$

Iš (8) lygties išreiškę y^2 ir gautąją išraišką įrašę į (2), turime

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{c^2+b^2+2cx+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

Analogiškai randame

$$F_2M=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|.$$

Atsižvelgę į tai, kad $a>c>0$ ir $|x|\leqslant a$, turime

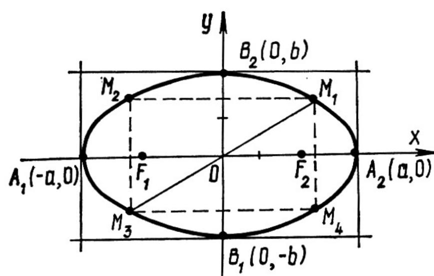
$$a+\frac{c}{a}x>0 \text{ ir } a-\frac{c}{a}x>0.$$

Vadinasi,

$$F_1M=a+\frac{c}{a}x,\ F_2M=a-\frac{c}{a}x \text{ ir } F_1M+F_2M=2a.$$

Taigi taškas N priklauso elipsei.

Jeigu taškas $M_1(x_1, y_1)$ priklauso elipsei, t. y. jo koordinatės tenkina (8) lygtį, tai ir taško $M_2(-x_1, y_1)$ koordinatės tenkina tą lygtį. Vadinasi, M_2 irgi yra elipsės taškas. Kadangi taškai M_1 ir M_2 yra simetriški *ašies Oy* atžvilgiu, tai *ašis Oy* yra elipsės *simetrijos ašis*. Panašiai įsitikiname, kad ir *ašis Ox* yra elipsės simetrijos ašis (268 pav.).



268 pav.

Taškai $A_1(a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ ir $B_2(0, b)$, kuriuose simetrijos ašys kerta elipsę, vadinami elipsės *viršūnėmis*, o ašių susikirtimo taškas O — elipsės *centru*. Atkarpos A_1A_2 ir B_1B_2 vadinamos elipsės *ašimis*, o atkarpos OA_2, OB_2 — jos *pusašėmis*. Kadangi $a>b$, tai $2a$ yra didžiosios elipsės ašies ilgis, o $2b$ — mažosios ašies ilgis.

Elipsės formą galima apibūdinti santykiu

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a},} \qquad (9)$$

kuris vadinamas *elipsės ekscentricitetu*. Kadangi $c<a$, tai $\varepsilon<1$.

Remdamiesi (6) lygybe, (9) lygybę užrašome šitaip:

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \qquad (10)$$

Matome, kad ε tuo didesnis, kuo trupmena $\frac{b}{a}$ mažesnė, t. y. tuo

labiau suspausta elipsė. Kai $b=a$, tada $\varepsilon=0$ ir elipsė išsigimsta į apskritimą:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \text{ arba } x^2+y^2=a^2.$$

Pavyzdžiai. 1. Parašysime lygtį elipsės, kurios pusašės yra $a=6$ ir $b=5$.

Įrašę pusašių ilgių reikšmes į (8) lygtį, gauname

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{5^2}=1, \text{ arba } \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1.$$

2. Rasime elipsės $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$ viršūnių ir židinių koordinates.

Iš elipsės lygties $a^2=64$, $a=8$; $b^2=25$, $b=5$. Taigi elipsės viršūnių koordinatės yra $A_1(-8, 0)$, $A_2(8, 0)$, $B_1(0, -5)$, $B_2(0, 5)$.

Iš (6) formulės išplaukia, kad $c^2=a^2-b^2$. Iš čia $c^2=64-25=39$, $c=\sqrt{39}$. Elipsės židiniai yra $F_1(-\sqrt{39}, 0)$ ir $F_2(\sqrt{39}, 0)$.

3. Parašysime lygtį elipsės, kurios didžioji pusašė $a=6$, o ekscentricitetas $\varepsilon=0{,}5$.

Kadangi $\varepsilon=\frac{c}{a}$, tai $c=\varepsilon\cdot a=0{,}5\cdot 6=3$. Iš (6) formulės išplaukia, kad $b^2=a^2-c^2$. Į šią lygybę įrašę a ir c reikšmes, gauname $b^2=$ $=6^2-3^2=27$.

Taigi ieškomoji elipsės lygtis yra:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

4. Parašysime lygtį elipsės, kurios židiniai yra ašyje Ox, pusašių suma lygi 8 ir atstumas tarp židinių lygus 8.

Iš sąlygos $2c=8$, $c=4$, $a+b=8$. Iš (6) lygybės gauname $c^2=$ $=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ arba $4^2=8(a-b)$. Iš čia $a-b=2$. Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} a+b=8, \\ a-b=2, \end{cases}$$

gauname $a=5$, $b=3$. Taigi ieškomoji elipsės lygtis yra

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

5. Elipsėje $9x^2+25y^2=225$ rasime tašką, kurio atstumas nuo dešiniojo židinio 4 kartus didesnis už to taško atstumą iki kairiojo židinio.

Pirmiausia rasime elipsės židinių koordinates. Elipsės lygtį padalįę iš 225, gauname

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Iš čia $a=5$, $b=3$. Pagal (6) formulę $c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=16$, $c=4$. Vadinasi, $F_1(-4, 0)$ ir $F_2(4, 0)$.

Sakykime, taškas $M(x, y)$ priklauso elipsei ir $F_2M=4F_1M$, t. y. $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=4\sqrt{(x+4)^2+y^2}$, arba $15x^2+15y^2+144x+240=0$. Taško M koordinates rasime išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 9x^2+25y^2=225, \\ 15x^2+15y^2+144x+240=0. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties randame

$$y^2=\frac{225-9x^2}{25}.$$

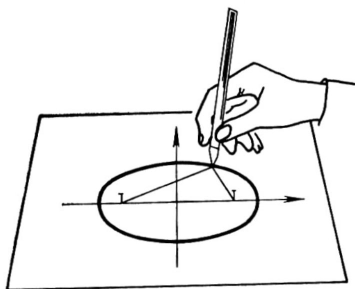
y^2 reikšmę įrašę į antrąją lygtį ir atlikę veiksmus, gauname

$$4x^2+680x+1875=0.$$

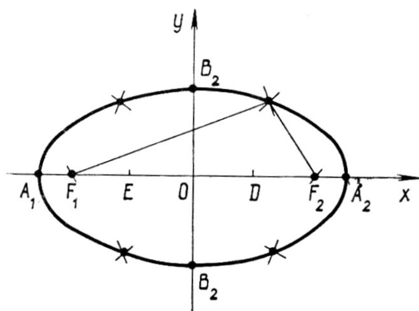
Šios lygties sprendiniai yra $x_1=-\frac{15}{4}$ ir $x_2=-\frac{125}{12}$. Kadangi $|x_2|=\frac{125}{12}>5$, tai taškas, kurio abscisė $x_2=-\frac{125}{12}$, negali priklausyti elipsei. Įrašę $x_1=-\frac{15}{4}$ $(|x_1|<5)$ reikšmę į y^2 išraišką, randame $y_1=\frac{\sqrt{63}}{4}$, $y_2=-\frac{\sqrt{63}}{4}$. Kadangi $|y_1|=|y_2|<3$, tai taškai $M_1\left(-\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{63}}{4}\right)$ ir $M_2\left(-\frac{15}{4}, -\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$ priklauso elipsei **ir pasižymi** savybe $F_2M_1=4F_1M_1$ ir $F_2M_2=4F_1M_2$.

9.11.2. Elipsės braižymas. Elipsę galima braižyti **keletu** būdų. **Čia** nagrinėsime tris.

1 būdas. Elipsę braižysime remdamiesi jos apibrėžimu. Imame siūlą, kurio ilgis lygus elipsės didžiajai ašiai $2a$. Jo galus įtvirtiname židiniuose $(2c<2a)$ ir pieštuko smaigaliu, įtempę siūlą, brėžiame elipsę (269 pav.).



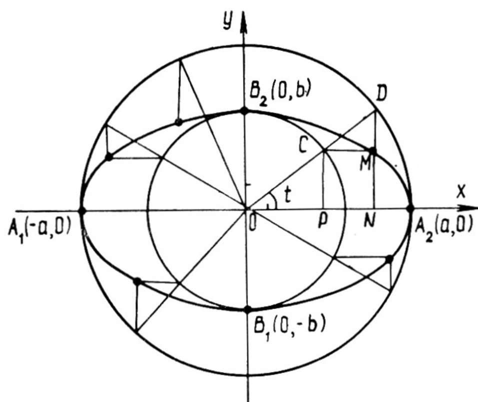
269 pav.



270 pav.

2 būdas. Žinant elipsės pusašes, jos taškus galima rasti skriestuvu. Koordinačių ašyse pažymėkime elipsės viršūnes $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ ir $B_2(0, b)$. Po to iš taško B_2 spinduliu a padarykime atžymas didžiojoje ašyje (270 pav.). Nesunku įsitikinti, kad tos atžymos — tai elipsės židiniai $F_1(-c, 0)$ ir $F_2(c, 0)$, nes $c^2=a^2-b^2$. Dabar didžiojoje ašyje tarp židinių paimkime bet kokį tašką D.

Tašką F_1 laikydami centru, brėžkime spindulio $R_1=A_1D$ apskritimą ir iš taško F_2 — spindulio $R_2=A_2D$ apskritimą. Šių apskritimų susikirtimo taškai priklauso elipsei, nes $R_1+R_2=A_1D+A_2D=2a$. Paėmę kitą didžiosios ašies tašką tarp židinių, rasime kitus elipsės taškus. Kuo daugiau elipsės taškų rasime, tuo tiksliau galėsime ją nubrėžti.



271 pav.

3 būdas. Sakykime, elipsė aprašyta (8) lygtimi. Koordinačių pradžią laikydami centru, brėžiame du apskritimus, kurių spinduliai yra $R_1=a$ ir $R_2=b$; didesnysis apskritimas abscisių ašį kerta taškuose $A_1(-a, 0)$ ir $A_2(a, 0)$, o mažesnysis ordinačių ašį — taškuose $B_1(0, -b)$ ir $B_2(0, b)$. Iš koordinačių pradžios nubrėžkime spindulį, kuris apskritimus kerta taškuose C ir D ir su ašimi Ox sudaro kampą t (271 pav.). Per tašką C nubrėžkime tiesę, lygiagrečią ašiai Ox, o per tašką D — tiesę, lygiagrečią ašiai Oy. Tos tiesės kertasi taške M. Įrodysime, kad taškas M priklauso elipsei. Iš tikrųjų

$$x=ON=OD\cos t=a\cos t,$$

$$y=MN=CP=OC\sin t=b\sin t,$$

arba

$$\frac{x}{a}=\cos t,\ \frac{y}{b}=\sin t \text{ ir } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1. \quad (1)$$

Imdami kitas kampo t reikšmes, rasime naujus elipsės taškus.
(1) lygtys vadinamos elipsės *parametrinėmis lygtimis*.

9.12. Hiperbolė

9.12.1. Hiperbolės apibrėžimas. Asimptotės. Ekscentricitetas. *Hiperbole* vadinama kreivė, kurios kiekvieno taško atstumų nuo dviejų duotųjų taškų skirtumas yra pastovus.

Duotieji taškai F_1 ir F_2 vadinami hiperbolės *židiniais* (272 pav.). Pažymėję atstumą tarp židinių $F_1F_2=2c$, o hiperbolės bet kurio taško M atstumų nuo židinių pastovų skirtumą — $2a$, remdamiesi hiperbolės apibrėžimu rašome

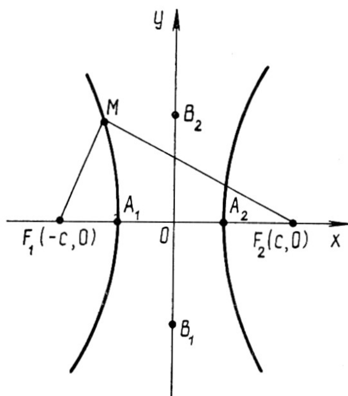
$$|MF_1-MF_2|=2a, \quad (1)$$

arba

$$MF_1-MF_2=\pm 2a. \quad (1')$$

Kadangi trikampio F_1MF_2 dviejų kraštinių ilgių skirtumas yra ne mažesnis už trečiosios kraštinės ilgį, tai $F_1F_2 > |F_1M - F_2M|$, arba $2c > 2a$, t. y. $c > a$.

Hiperbolės paprasčiausią lygtį gausime koordinačių sistemą pasirinkę panašiai kaip ir elipsės atveju: abu židinius — ašyje Ox, koordinačių pradžią — atkarpos F_1F_2 viduryje (272 pav.). Tada



272 pav.

$OF_1 = OF_2 = c$ ir židinių koordinatės yra $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Jeigu $M(x, y)$ — bet kuris hiperbolės taškas, tai

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Įrašę F_1M ir F_2M išraiškas į (1′) lygybę, gauname hiperbolės lygtį:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (2)$$

(2) lygtį supaprastiname panašiai kaip ir elipsės lygtį: perkėlę antrąjį kairiosios lygties pusės radikalą į dešinę, abi puses pakėlę kvadratu, sutraukę panašiuosius narius ir padalinę iš 4, gauname

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dar kartą pakėlę gautosios lygties abi puses kvadratu ir sutraukę panašiuosius narius, turime

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \qquad (3)$$

Kadangi $c > a$, tai $c^2 - a^2$ yra teigiamasis dydis, jį pažymėkime b^2:

$$c^2 - a^2 = b^2. \qquad (4)$$

Tuomet iš (3) lygties gausime

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

arba

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (5)$$

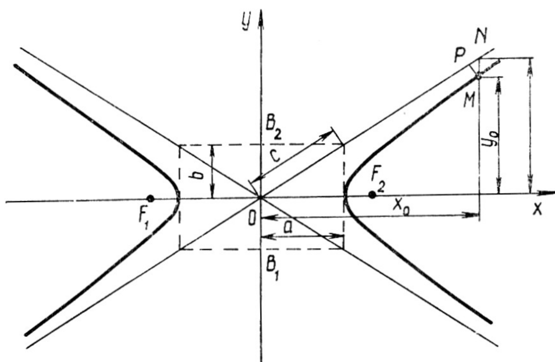
Tai — *kanoninė* hiperbolės lygtis.

(5) lygtis yra (2) lygties išvada. Kaip ir nagrinėjant elipsę, galima įrodyti, kad taškas $N(x, y)$, kurio koordinatės tenkina (5) lygtį, priklauso hiperbolei.

Pateiksime kai kurias hiperbolės savybes.

1) Hiperbolė yra simetriška koordinačių ašių atžvilgiu, t. y. jei taško $M(x, y)$ koordinatės tenkina (5) lygtį, tai tą lygtį tenkina ir taškų $M_1(-x, y)$ ir $M_2(x, -y)$ koordinatės. Koordinačių ašys vadinamos hiperbolės *simetrijos ašimis*, jų susikirtimo taškas O — hiperbolės *centru*.

2) Kai $y=0$, iš (5) lygties gauname $x=\pm a$, t. y. ašis Ox hiperbolę kerta taškuose $A_1(-a, 0)$ ir $A_2(a, 0)$. Šie taškai vadinami hiperbolės viršūnėmis, o atkarpa A_1A_2 — realiąja hiperbolės ašimi.



273 pav.

Kai $x=0$, iš (5) lygties išplaukia, kad $y^2=-b^2$. Si lygtis realių sprendinių neturi. Taigi ašis Oy hiperbolės nekerta. Atkarpą $B_1B_2=$ $=2b$ vadinsime menamąja ašimi (273 pav.).

3) Kadangi (5) lygtyje dviejų teigiamųjų skaičių skirtumas lygus 1, tai pirmasis narys turi būti didesnis už 1, t. y.

$$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1, \quad \text{arba} \quad |x|\geqslant a.$$

Vadinasi, tarp tiesių $x=-a$ ir $x=a$ hiperbolės taškų nėra. Kadangi kreivė simetriška koordinačių ašių atžvilgiu, tai smulkiau ištirsime tik hiperbolės dalį, esančią pirmajame ketvirtyje. Tuo tikslu, laikydami x ir y teigiamais, iš (5) lygties išreiškiame y:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\,x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}. \tag{6}$$

Kai x neaprėžtai didėja, $1-\frac{a^2}{x^2}$ artėja prie 1. (6) lygybėje šaknį pakeitę 1, gauname tiesės lygtį

$$y=\frac{b}{a}\,x.$$

Kadangi $x > \sqrt{x^2-a^2}$, tai

$$\frac{b}{a}x > \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (7)$$

(7) nelygybė rodo, kad tiesės, kurios lygtis yra $y=\frac{b}{a}x$, taškų ordinatės yra didesnės už tas pačias abscises turinčių hiperbolės taškų ordinates (275 pav.), t. y. kreivės grafikas yra žemiau tiesės grafiko.

Ištirsime hiperbolės taško $M(x_0, y_0)$ atstumą nuo tiesės $y=\frac{b}{a}x$, kai x_0 didėja. Tiesės lygtį užrašome taip: $bx-ay=0$. Remdamiesi 9.9 skyrelio (4) formule, gauname

$$MP=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot(bx_0+ay_0)}.$$

Kadangi taškas M priklauso hiperbolei, tai $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$ ir $b^2+a^2=c^2$. Vadinasi,

$$MP=\frac{a^2b^2}{c(bx_0+ay_0)}.$$

Kai x_0 neaprėžtai didėja, MP artėja prie nulio.

Dėl hiperbolės simetriškumo ašies Ox atžvilgiu hiperbolės taškas M_1, esantis ketvirtajame ketvirtyje, toldamas į begalybę artėja prie tiesės $y=-\frac{b}{a}x$. Kadangi hiperbolė simetriška ir ašies Oy atžvilgiu, tai panašias išvadas galime padaryti ir hiperbolės taškams, esantiems antrajame ir trečiajame ketvirčiuose.

Tiesės

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x, \qquad y=-\frac{b}{a}x} \qquad (8)$$

vadinamos hiperbolės *asimptotėmis*.

Hiperbolės šakų forma priklauso nuo santykio $\frac{b}{a}$ — kuo mažesnis santykis $\frac{b}{a}$, tuo labiau suspaustos hiperbolės šakos.

Praktiškai hiperbolės formą patogiau apibūdinti ekscentricitetu ε:

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.} \qquad (9)$$

Kuo mažesnis hiperbolės ekscentricitetas, tuo labiau ji suspausta.

Kai $a=b$, hiperbolė vadinama *lygiaaše*. Jos lygtis yra

$$x^2-y^2=a^2. \qquad (10)$$

Lygiaašės hiperbolės asimptočių lygtys yra

$$y=x, \qquad y=-x, \qquad (11)$$

o jos ekscentricitetas — $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Pavyzdžiai. 1. Rasime hiperbolės $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ viršūnes, židinius, ekscentricitetą ir kampą tarp asimptočių.

Kadangi $a^2=64$, $b^2=36$, tai $a=8$, $b=6$. Hiperbolės viršūnės yra $A_1(-8, 0)$ ir $A_2(8, 0)$. Pasinaudoję (4) formule, gauname $c=$ $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$. Hiperbolės židiniai yra $F_1(-10, 0)$ ir $F_2(10, 0)$. Hiperbolės ekscentricitetas lygus $\varepsilon=\frac{10}{8}=$ $=\frac{5}{4}$, o asimptočių krypties koeficientai $k_1=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, $k_2=-\frac{3}{4}$. Pagal 9.8 skyrelio (14) formulę

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+1}\right|=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}=\frac{24}{7}\approx 3{,}43, \qquad \varphi\approx 73{,}7^\circ.$$

2. Parašysime lygtį hiperbolės, kurios realiosios ir menamosios ašių ilgių suma lygi 14, o atstumas tarp židinių lygus 10.

Iš sąlygos gauname $2a+2b=14$ ir $2c=10$, t. y. $a+b=7$, $c=5$. Iš (4) formulės išplaukia, kad $a^2+b^2=25$. Taigi a ir b reikšmes rasime išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} a^2+b^2=25, \\ a+b=7. \end{cases}$$

Ši lygčių sistema turi du sprendinius: $a=4$, $b=3$ ir $a=3$, $b=4$. Vadinasi, yra dvi hiperbolės

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \quad \text{ir} \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,$$

tenkinančios duotąsias sąlygas.

3. Rasime lygtį kreivės, kurios kiekvieno taško nuotolis nuo tiesės $x=-2$ yra du kartus mažesnis už to taško nuotolį iki taško $F(-8, 0)$.

Sakykime, kad taškas $M(x, y)$ priklauso nagrinėjamai kreivei (274 pav.). Tuomet $2MP=MF$ arba

$$2|x+2|=\sqrt{(x+8)^2+y^2}.$$

Šios lygties abi puses pakėlę kvadratu ir sutraukę panašiuosius narius, gauname

$$3x^2-y^2=48,$$

arba

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1.$$

Nagrinėjamoji kreivė yra hiperbolė.

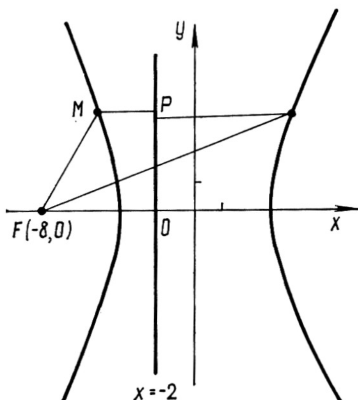
9.12.2. Hiperbolės braižymas. 1 b ū d a s. Braižysime hiperbolę remdamiesi jos apibrėžimu. Imame liniuotę, ilgesnę už hiperbolės realiąją ašį, ir siūlą tokio ilgio, kad skirtumas tarp liniuotės ir siūlo ilgių būtų lygus $2a$. Kurį nors liniuotės galą

pritvirtiname židinyje F_2, apie kurį ji gali suktis. Vieną siūlo galą pritvirtiname židinyje F_1, o kitą — laisvajame liniuotės gale (275 pav.). Laikant pieštuko smaigaliu įtemptą siūlą išilgai liniuotės ir liniuotę sukant apie židinį F_2, pieštuko smaigalys brėš hiperbolės šaką. Iš tikrųjų skirtumas tarp liniuotės ir siūlo ilgių lygus $2a$. Kita vertus, liniuotės ilgis lygus F_2M+MK, o siūlo ilgis — F_1M+MK, todėl

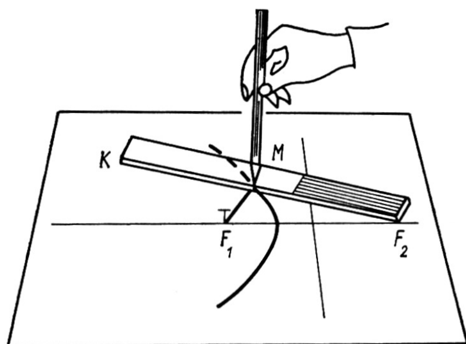
$$F_2M+MK-(F_1M+MK)=F_2M-F_1M=2a.$$

Kuo ilgesnė liniuotė, tuo didesnę hiperbolės šaką galime nubrėžti.

Pritvirtinę vieną liniuotės galą židinyje F_1, o siūlo galus — židinyje F_2 ir kitame liniuotės gale, nubrėšime antrąją hiperbolės šaką.

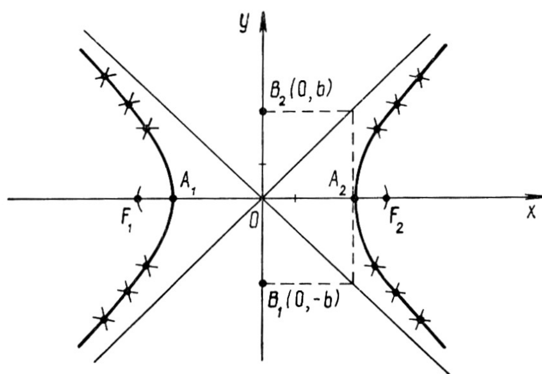


274 pav.



275 pav.

2 būdas. Žinodami hiperbolės kanoninę lygtį, jos taškus galime rasti skriestuvu. Koordinačių ašyse pažymime viršūnes $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$, $B_1(0,\ -b)$ ir $B_2(0,\ b)$ (276 pav.). Iš taško O spinduliu A_2B_2 ašyje Ox darome atžymas. Tai — hiperbolės židiniai $F_1(-c,\ 0)$ ir $F_2(c,\ 0)$, nes $a^2+b^2=c^2$. Toliau iš židinio F_1 brėžiame bet kokio spindulio R_1 apskritimą, o iš židinio F_2 — spindulio $R_2=R_1+2a$ apskritimą. Akivaizdu, kad apskritimų susikirtimo taškai priklauso hiperbolei. Keisdami spindulį R_1, galime gauti kiek norime hiperbolės taškų. Pastebėję, kad hiperbolės taškai yra netoli asimptočių, brėžiame apskritimų lankus, esančius arti asimptočių.

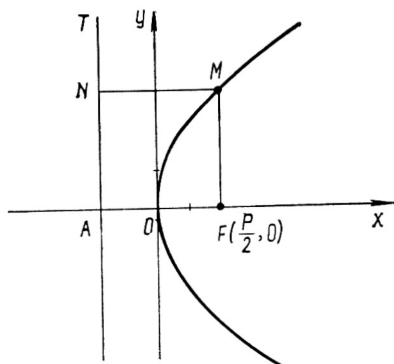


276 pav.

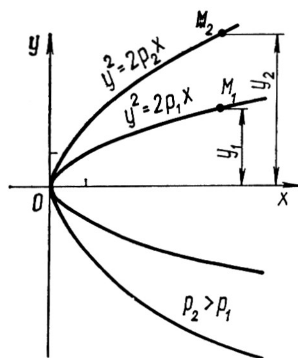
9.13. Parabolė

9.13.1. Parabolės lygtis. Parabole vadinama kreivė, kurios kiekvienas taškas yra vienodai nutolęs nuo žinomo taško ir žinomos tiesės.

Taškas F vadinamas parabolės *židiniu,* o tiesė T — jos *direktrise* (277 pav.).



277 pav.



278 pav.

Židinio F atstumą nuo direktrisės T pažymėkime p $(p>0)$. Jeigu M — bet kuris parabolės taškas, tai pagal apibrėžimą

$$FM=MN; \tag{1}$$

čia N — statmens, nuleisto iš taško M į direktrisę T, pagrindas.

Ieškosime parabolės lygties. Ašį Ox brėžiame per židinį statmenai direktrisei. Jos kryptį parenkame taip, kad židinys priklausytų teigiamajai pusašei. Koordinačių pradžia laikome atkarpos AF vidurio tašką (A — ašies Ox ir direktrisės susikirtimo taškas) (277 pav.). Tada židinio F koordinatės yra $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, o direktrisės lygtis — $x=-\frac{p}{2}$.

Jeigu $M(x, y)$ — bet kuris plokštumos taškas, tai

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}, \qquad MN=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Taškas M priklauso parabolei, jeigu

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Šios lygties abi puses pakėlę kvadratu ir sutraukę panašiuosius narius, gauname

$$\boxed{y^2=2px.} \tag{2}$$

Tai *kanoninė* parabolės lygtis. Dydis p vadinamas parabolės *parametru.*

Pateiksime keletą parabolės savybių:

1) kadangi $p>0$ ir $y^2\geqslant 0$, tai $x\geqslant 0$. Vadinasi, visi parabolės taškai yra į dešinę nuo ašies Oy;

2) x didėjant, neaprėžtai didėja ir y^2, ir $|y|$;

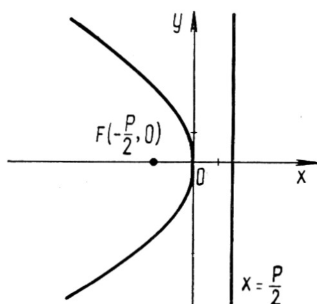
3) jeigu taško $N(x, y)$ koordinatės tenkina (2) lygtį, tai tą lygtį tenkina ir taško $N_1(x, -y)$ koordinatės. Vadinasi, Ox yra parabolės *simetrijos ašis.* Šią ašį vadinsime tiesiog parabolės *ašimi*;

4) parabolės ašis kerta parabolę taške $O(0, 0)$, kurį vadinsime parabolės *viršūne*;

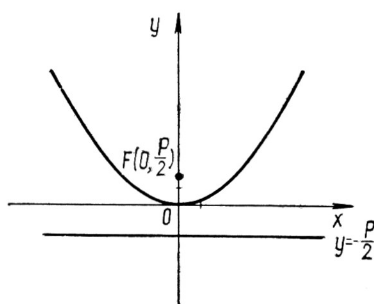
5) ištirsime, kaip kinta parabolės forma kintant parametrui p. Imkime dvi paraboles $y^2=2p_1x$ ir $y^2=2p_2x$, $p_2>p_1>0$. Jeigu $M_1(x_0, y_1)$ ir $M_2(x_0, y_2)$ yra atitinkamai pirmosios ir antrosios parabolių taškai, tai $y_2^2>y_1^2$, arba $|y_2|>|y_1|$. Iš čia aišku, kad didėjant parametrui, parabolės šaka tolsta nuo ašies Ox (278 pav.).

Pastaba. Jeigu parabolės židinį pasirinktume neigiamojoje Ox pusašėje, t. y. imtume $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, o direktrisę — $x=\frac{p}{2}$, tai gautume parabolės lygtį (279 pav.)

$$y^2=-2px. \tag{3}$$



279 pav.



280 pav.

Jeigu parabolės židinys $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, o direktrisė — $y=-\frac{p}{2}$ (280 pav.), tai parabolės lygtis yra

$$x^2=2py. \tag{4}$$

Parabolės, kurios židinys $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, o direktrisė $y=\frac{p}{2}$ (281 pav.), lygtis yra

$$x^2=-2py. \tag{5}$$

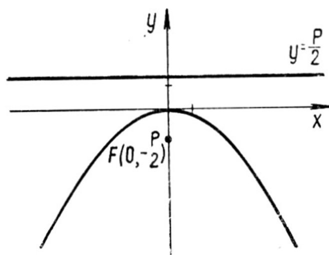
Pavyzdžiai. 1. Parašysime lygtį parabolės, kurios: a) židinys $F(5, 0)$, o viršūnė koordinačių pradžioje; b) direktrisė $y=-2$, o viršūnė koordinačių pradžioje.

a) Kadangi židinys yra teigiamojoje Ox pusašėje, tai naudosimės (2) lygtimi. Židinio koordinatės yra $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, todėl $\frac{p}{2}=5$. Iš čia $p=10$. Rastąją p reikšmę įrašę į (2) lygtį, gauname

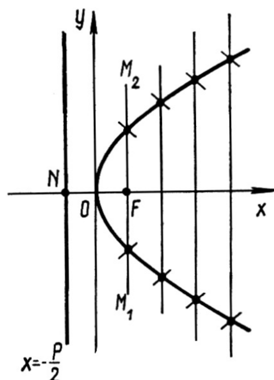
$$y^2=20x.$$

b) Kadangi $-\frac{p}{2}=-2$, tai $p=4$. Iš (4) lygties gauname

$$x^2=8y.$$



281 pav.



282 pav.

2. Rasime parabolės židinį ir direktrisės lygtį, kai: a) $y^2=4x$; b) $y^2=-4x$; c) $x^2=-4y$.

a) Palyginę duotąją lygtį su (2) lygtimi, gauname $2p=4$, t. y. $p=2$. Taigi parabolės židinys yra $F(1, 0)$, o direktrisė — $x=-1$.

b) Pasinaudoję (3) lygtimi, gauname $-2p=-4$, $p=2$. Vadinasi, parabolės židinys yra $F(-1, 0)$, o direktrisės lygtis $x=1$.

c) Pasinaudoję (5) lygtimi, randame $F(0, -1)$ ir direktrisės lygtį $y=1$.

3. Per parabolės $y^2=15x$ židinį išvesta tiesė, statmena ašiai Ox. Rasime tos tiesės atkarpos, esančios tarp susikirtimo su parabole taškų, ilgį.

Tiesės ir parabolės susikirtimo taškų M_1 ir M_2 abscisės lygios parabolės židinio abscisei (282 pav.). Iš parabolės lygties randame $p=7{,}5$. Taigi židinio F koordinatės yra $F(3{,}75, 0)$. Įrašę į parabolės lygtį $x=3{,}75$, rasime taškų M_1 ir M_2 ordinates: $y^2=15\cdot3{,}75=56{,}25$. Iš čia $y_1=-7{,}5$, $y_2=7{,}5$. Stygos M_1M_2 ilgis lygus $|y_2-y_1|=7{,}5+$ $+7{,}5=15$.

4. Ieškosime parabolės $y^2=12x$ ir elipsės

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

susikirtimo taškų koordinačių.

Susikirtimo taškus rasime išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1, \\ y^2=12x. \end{cases}$$

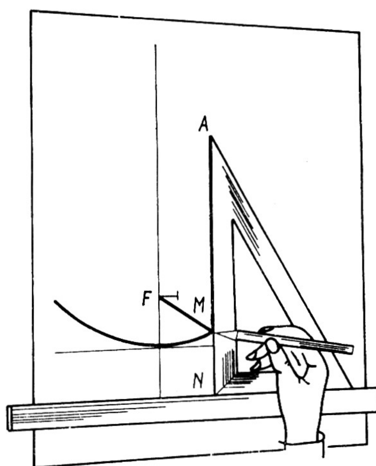
Iš antrosios lygties išreiškę y^2 ir įrašę į pirmąją lygtį, gauname

$$\frac{x^2}{25}+\frac{12x}{16}=1, \text{ arba } 4x^2+75x-100=0.$$

Šios lygties šaknys yra $x_1=-10$, $x_2=\frac{5}{4}$. Įrašę x_1 reikšmę į antrąją lygtį, turime $y^2=-120$. Ši lygtis realių sprendinių neturi. Įrašę x_2 reikšmę į antrąją lygtį, gauname $y^2=15$, arba $y_1=-\sqrt{15}$, $y_2=\sqrt{15}$. Vadinasi, parabolės ir elipsės susikirtimo taškų koordinatės yra

$$M_1\left(\frac{5}{4}, -\sqrt{15}\right) \text{ ir } M_2\left(\frac{5}{4}, \sqrt{15}\right).$$

9.13.2. Parabolės braižymas. 1 būdas. Remsimės parabolės apibrėžimu. Prie įtvirtintos liniuotės, kurios viena briauna sutampa su parabolės direktrise, trumpesniuoju statiniu priglaudžiame kampainį. Siūlo, kurio ilgis lygus kampainio ilgesniojo statinio ilgiui, vieną galą pritvirtiname parabolės židinyje, o kitą galą —



283 pav.

kampainio viršūnėje A (283 pav.). Laikant pieštuko smaigaliu įtemptą siūlą išilgai didžiojo statinio ir kampainį stumiant išilgai liniuotės, pieštuko smaigalys brėš parabolės lanką. Iš tikrųjų $AN=NM+AM$ ir $AN=FM+AM$. Taigi $NM=MF$.

2 būdas. Žinant parabolės lygtį $y^2=2px$, parabolės taškus galima rasti skriestuvu ir liniuote.

Ašyje Ox pažymime židinį $F(\frac{p}{2}, 0)$ ir nubrėžiame direktrisę $x=-\frac{p}{2}$, kuri ašį Ox kerta taške N. Nubrėžiame keletą tiesių, lygiagrečių direktrisei (282 pav.).

Randame kiekvienos tiesės susikirtimo su apskritimu, kurio centras židinyje, o spindulys lygus taško N atstumui nuo tos tiesės, taškus. Gautieji taškai priklauso parabolei.

9.14. Antrosios eilės kreivės

Nagrinėsime bendrąją lygtį

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \quad (1)$$

Kreivės, kurių taškų koordinatės tenkina (1) lygtį, vadinamos *antrosios eilės* kreivėmis. Nesunku pastebėti, kad 9.10 — 9.13 skyreliuose išnagrinėtos kanoninės lygtys yra (1) lygties atskiri atvejai. Pavyzdžiui, kai $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=E=0$, $F=-R^2$, gauname apskritimo lygtį

$$x^2+y^2=R^2.$$

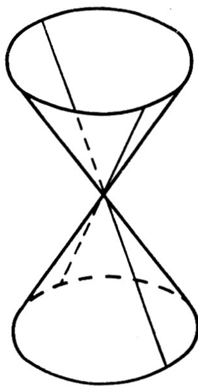
Kai $A=\frac{1}{a^2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{b^2}$, $D=E=0$, $F=-1$, (1) lygtis tampa elipsės lygtimi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Atitinkamai parinkę (1) lygties koeficientų reikšmes, galime gauti hiperbolės bei parabolės lygtis.

Antrosios eilės kreivės buvo žinomos jau Senovės Graikijoje, nors graikų matematikai nežinojo koordinačių metodo. Tas kreives jie gavo kirsdami apskritąjį kūginį paviršių plokštumomis.

Apskrituoju kūginiu paviršiumi, arba *apskrituoju kūgiu,* vadinamas paviršius, gautas sukant vieną tiesę apie ją kertančią kitą tiesę (284 pav.).



284 pav.

Jeigu kūginį paviršių kirsime plokštuma, statmena kūgio sukimosi ašiai, tai pjūvis bus apskritimas (285 pav., *a*).

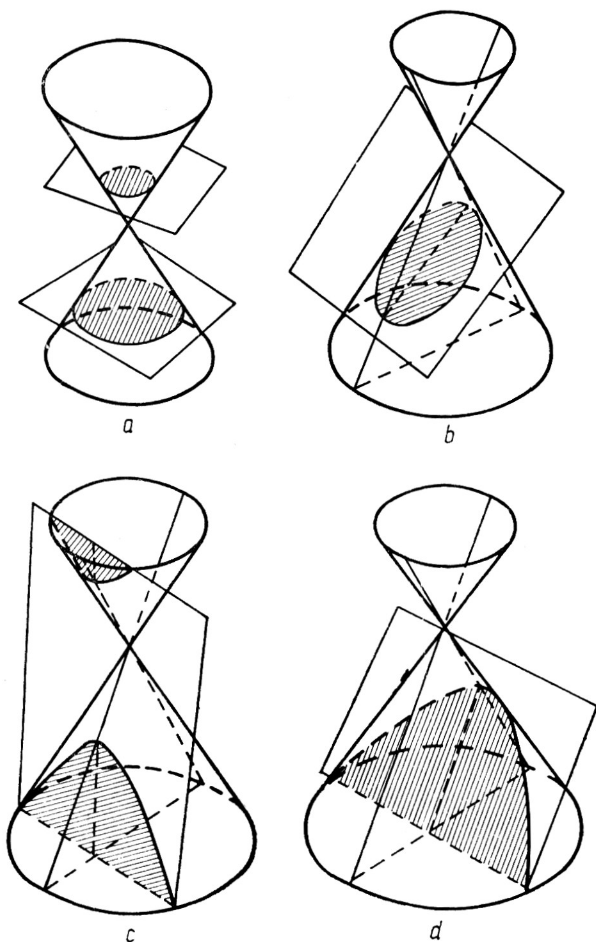
Jeigu plokštuma kerta tik vieną kūgio dalį ir nėra lygiagreti jo sudaromajai, tai pjūvis yra elipsė (285 pav., *b*).

Jeigu plokštuma kerta vieną kūgio dalį ir yra lygiagreti kūgio sudaromajai, tai pjūvis — parabolė (285 pav., *c*).

Jeigu plokštuma kerta abi kūgio dalis ir yra lygiagreti kūgio sukimosi ašiai, tai pjūvis — hiperbolė (285 pav., *d*).

Žymiausieji prancūzų matematikai Pjeras Ferma (1601—1665) ir Renė Dekartas (1596—1650) sukūrė analizinės geometrijos pagrindus. Naudodamiesi koordinačių sistema, geometrijos uždavinius jie ėmė spręsti algebriškai.

Reikia pažymėti, kad ypač didelę reikšmę analizinės geometrijos plėtotei turėjo šveicarų matematiko L. Oilerio (1707—1783), ilgą laiką dirbusio Peterburge, ir prancūzų matematiko Ž. Lagranžo (1736—1813) darbai.



285 pav.

9.15. Pratimai

1. Sudarykite lygtį kreivės, kurios kiekvieno taško atstumų nuo taškų $A(0, 0)$ ir $B(4, 0)$ kvadratų skirtumas lygus 16.

2. Sudarykite lygtį kreivės, kurios kiekvieno taško atstumų nuo taškų $A(-2, 0)$ ir $B(2, 0)$ kvadratų suma lygi 16.

3. Sudarykite lygtis kreivių, kurių kiekvienas taškas vienodai nutolęs nuo taškų: 1) $A(3, 2)$, $B(2, 3)$; 2) $A(5, -1)$, $B(1, -5)$; 3) $A(5, -2)$, $B(-3, -2)$; 4) $A(3, -1)$, $B(3, 5)$; 5) $A(0, 1)$, $B(3, -1)$.

4. Sudarykite lygtis kreivių, kurių kiekvienas taškas yra vienodai nutolęs atstumu a nuo: 1) ašies Oy; 2) ašies Ox.

5. Duoti taškai $A(2, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(4, 5)$, $D(-7, -2{,}5)$ ir $E(3, 5)$. Kurie iš tų taškų priklauso tiesei $3x-4y+11=0$?

6. Taškai A, B, C, D ir E priklauso tiesei $2x-5y+3=0$ ir jų abscisės atitinkamai lygios 1, -1, -4, 0 ir 3,5. Raskite tų taškų ordinates.

7. Taškai A, B, C, D ir E priklauso tiesei $3x-2y+6=0$ ir jų ordinatės atitinkamai lygios 0, 3, -3, 9 ir 4. Raskite tų taškų abscises.

8. Raskite tiesių: 1) $3x+4y-12=0$; 2) $2x-5y+10=0$; 3) $4x+5y+20=0$; 4) $3x-5y+15=0$; 5) $3x+7y-21=0$ susikirtimo su koordinačių ašimis taškus. Nubrėžkite tieses.

9. Nubrėžkite tieses: 1) $x+2=0$; 2) $x-3=0$; 3) $y+4=0$; 4) $y-5=0$; 5) $x+\sqrt{2}=0$.

10. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką M_0 ir statmenos vektoriui $\mathbf{n}$, kai: 1) $M_0(1, -3)$, $\mathbf{n}=(-2, 3)$; 2) $M_0(-1, -2)$, $\mathbf{n}=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}$; 3) $M_0(3, -2)$, $\mathbf{n}=\overrightarrow{AB}$, $A(0,1)$, $B(4,-2)$; 4) $M_0(-1, 5)$, $\mathbf{n}=\mathbf{i}$; 5) $M_0(4, 3)$, $\mathbf{n}=-\mathbf{j}$.

11. Duotos trikampio viršūnės $A(2, 1)$, $B(-1, 1)$ ir $C(3, 2)$. Sudarykite trikampio aukštinių lygtis.

12. Duotos dvi stačiakampio kraštinių lygtys $3x-4y+5=0$ ir $4x+3y-8=0$ ir viena jo viršūnė $A(1, -2)$. Parašykite kitų dviejų stačiakampio kraštinių lygtis.

13. Parašykite lygtį tiesės, einančios per atkarpos AB vidurio tašką ir jai statmenos, kai: 1) $A(2, 5)$, $B(-6, 3)$; 2) $A(-1, 4)$, $B(3, -2)$.

14. Parašykite lygtį tiesės, statmenai einančios per atkarpos AB tašką C, jeigu: 1) $A(-3, -2)$, $B(9, 6)$ ir $AC:CB=2$; 2) $A(0, 7)$, $B(4, -1)$ ir $AC:CB=3$; 3) $A(5, -1)$, $B(2, 2)$ ir $AC:CB=0{,}5$.

15. Parašykite lygtį tiesės, jeigu iš koordinačių pradžios nubrėžto statmens tiesei pagrindas yra taškas $A(2, 3)$.

16. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką M_0 lygiagrečiai vektoriui $\mathbf{p}$, kai: 1) $M_0(2, -1)$, $\mathbf{p}=(-2, 3)$; 2) $M_0(1, 0)$, $\mathbf{p}=\overrightarrow{AB}$, $A(2, -3)$, $B(4, 1)$; 3) $M_0(-1, 3)$, $\mathbf{p}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$; 4) $M_0(2, 1)$, $\mathbf{p}=\mathbf{i}$; 5) $M_0(-1, 1)$, $\mathbf{p}=\mathbf{j}$.

17. Žinomi trikampio kraštinių vidurio taškai $D(2, 1)$, $E(5, 3)$ ir $F(3, -4)$. Parašykite trikampio kraštinių lygtis.

18. Duotos dvi lygiagretainio kraštinių lygtys $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$, $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}$ ir viena viršūnė $A(2, -3)$. Parašykite kitų dviejų lygiagretainio kraštinių lygtis.

19. Žinomos trikampio viršūnės $A(1, 5)$, $B(-1, 2)$ ir $C(3, 2)$. Parašykite tiesių, einančių per trikampio viršūnes lygiagrečiai priešingoms trikampio kraštinėms, lygtis.

20. Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus A ir B, kai: 1) $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$; 2) $A(0, 0)$, $B(1, -3)$; 3) $A(2, 4)$, $B(2, -3)$; 4) $A(-1, 3)$, $B(4, 3)$, 5) $A(-3, 2)$, $B(2, 5)$.

21. Žinomos trikampio viršūnių koordinatės: $A(3, 2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 0)$. Parašykite: 1) trikampio kraštinių lygtis; 2) trikampio pusiaukraštinių lygtis.

22. Žinomos dvi gretimos lygiagretainio viršūnės $A(-3, -1)$, $B(2, 2)$ ir taškas $E(3, 0)$ — lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas. Parašykite lygiagretainio kraštinių lygtis.

23. Parašykite tiesių ašines lygtis, kai žinomos jų bendrosios lygtys: 1) $x-3y+6=0$; 2) $2x+3y-12=0$; 3) $2x-5y+20=0$; 4) $x+2y+8=0$; 5) $3x+y-9=0$.

24. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(1, -2)$ ir koordinačių ašyse atkertančios vienodo ilgio atkarpas.

25. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(-2, 3)$ ir ašyje Ox atkertančios 5 ilgio vienetų atkarpą.

26. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(2, 5)$ ir ašyje Oy atkertančios 3 ilgio vienetų atkarpą.

27. Tiesė eina per tašką M_0, jos krypties koeficientas k. Parašykite tiesės lygtį, kai: 1) $M_0(3, -2)$, $k=3$; 2) $M_0(-2, 7)$, $k=-2$; 3) $M_0(-3, -4)$, $k=2{,}5$.

28. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(1, -1)$ ir su ašimi Ox sudarančios: 1) $45°$; 2) $30°$; 3) $60°$; 4) $120°$; 5) $135°$ kampą.

29. Parašykite tiesės lygtį, kai žinomas jos krypties koeficientas k ir ašyje Oy atkirstos atkarpos ilgis b: 1) $k=-2$, $b=3$; 2) $k=3$, $b=2$; 3) $k=2{,}5$, $b=-2$; 4) $k=-\frac{3}{4}$, $b=5$; 5) $k=-\frac{2}{5}$, $b=-\frac{4}{5}$.

30. Raskite tiesės $5x+2y+5=0$ krypties koeficientą.

31. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(2, -1)$ ir su ašimi Ox sudarančios to paties didumo kampą kaip ir tiesė $6x-2y+5=0$.

32. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M_0(0, -2)$ ir su ašimi Ox sudarančios to paties didumo kampą kaip ir tiesė $y=\frac{3}{2}x-1$.

33. Raskite kampą tarp ašies Ox ir tiesės: 1) $\sqrt{3}x-y-5=0$; 2) $y=-x+3$; 3) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}}=\frac{y+1}{2}$; 4) $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-3\sqrt{3}}$; 5) einančios per taškus $A(2, 0)$ ir $B(4, -2)$.

34. Ištirkite tiesių tarpusavio padėtį (jei tiesės kertasi, raskite susikirtimo tašką): 1) $x+y=0$ ir $y-3=0$; 2) $3x+2y+1=0$ ir $6x+4y+5=0$; 3) $2x+5y+19=0$ ir $3x-4y-29=0$; 4) $x+y-1=0$ ir $x+4=0$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}x-3y+\sqrt{3}=0$ ir $x-2\sqrt{3}y+2=0$.

35. Su kuriomis α reikšmėmis tiesės yra lygiagrečios: 1) $\alpha x+3y-4=0$ ir $x-6y+5=0$; 2) $x+\alpha y+4=0$ ir $\alpha x+16y-3=0$; 3) $2x+\alpha y+5=0$ ir $4x-5y+\alpha=0$.

36. Su kuriomis m reikšmėmis šios tiesės yra statmenos: 1) $mx+3y-7=0$ ir $2x-6y+7=0$; 2) $3x+my+6=0$ ir $x-2y+m=0$; 3) $2x+my-5=0$ ir $3x+4y-m=0$; 4) $9x+my-3=0$ ir $4x-my+5=0$; 5) $mx-y+m=0$ ir $9x-my+3=0$.

37. Žinomos trikampio kraštinių lygtys: $5x-3y-15=0$, $x+5y-3=0$, $3x+y+5=0$. Raskite trikampio viršūnių koordinates.

38. Raskite kampą tarp tiesių: 1) $5x-y+7=0$ ir $3x+2y=0$; 2) $18x+6y-17=0$ ir $5x+10y-9=0$; 3) $y=3x+5$ ir $5x+y-11=0$; 4) $y=\frac{2}{3}x+5$ ir $y=-\frac{1}{3}x-4$; 5) $\frac{x+1}{2\sqrt{3}}=\frac{y-3}{2}$ ir $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{5\sqrt{3}}$.

39. Žinomos dviejų stačiakampio kraštinių lygtys $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ ir vienos jo įstrižainės lygtis $7x+y-15=0$. Raskite stačiakampio viršūnių koordinates.

40. Žinomos dviejų stačiakampio kraštinių lygtys $2x-5y+3=0$, $2x-5y-26=0$ ir vienos jo įstrižainės lygtis $7x-3y-33=0$. Parašykite kitų stačiakampio kraštinių ir įstrižainės lygtis.

41. Žinomos trikampio viršūnės $A(1, -1)$, $B(-5, 2)$ ir $C(-2, 3)$. Raskite: 1) kraštinės AB ilgį; 2) kampo BAC didumą; 3) aukštinės, išvestos iš viršūnės C, lygtį; 4) pusiaukraštinės, išvestos iš viršūnės C, lygtį; 5) aukštinių susikirtimo taško koordinates.

42. Žinomos dvi gretimos stačiakampio viršūnės $A(-3, 3)$, $B(0, -6)$ ir įstrižainių susikirtimo taškas $O(2{,}5, -0{,}5)$. Parašykite stačiakampio kraštinių lygtis.

43. Duotos dviejų lygiagretainio kraštinių lygtys $2x+3y+4=0$, $2x+3y=0$ ir įstrižainės lygtis $x+2y+2=0$. Parašykite kitų lygiagretainio kraštinių ir įstrižainės lygtis.

44. Žinomos dvi trikampio ABC viršūnės $A(3, -1)$, $B(5, 7)$ ir $N(4, -1)$— aukštinių susikirtimo taškas. Raskite: 1) kraštinių lygtis; 2) viršūnės C koordinates; 3) kampo BAC didumą; 4) pusiaukraštinės AM lygtį; 5) kraštinės AC ilgį.

45. Žinomos dvi trikampio ABC viršūnės $A(-10, 2)$, $B(6, 4)$ ir $D(-2, -2)$— kraštinės AC vidurio taškas. Raskite: 1) viršūnės C koordinates; 2) kraštinių lygtis; 3) aukštinių lygtis; 4) aukštinių susikirtimo taško koordinates; 5) kampo ABC didumą.

46. Apskaičiuokite taško M_0 atstumą nuo tiesės: 1) $3x-4y+5=0$, $M_0(-1, 3)$; 2) $x+2y-2\sqrt{5}=0$, $M_0(2, -1)$; 3) $2x-5y-1=0$, $M_0(3, 1)$; 4) $\sqrt{3}\,x+y+2=0$, $M_0(0, 4)$; 5) $2x-3y-5=0$, $M_0(-1, 2)$.

47. Raskite atstumą tarp lygiagrečių tiesių: 1) $3x-4y-10=0$ ir $6x-8y+5=0$; 2) $x+3y+4=0$ ir $x+3y+6=0$; 3) $4x-3y=0$ ir $8x-6y+9=0$; 4) $5x-12y+26=0$ ir $5x-12y-13=0$; 5) $2x-y+5=0$ ir $4x-2y-9=0$.

48. Raskite tašką, simetrišką taškui M duotosios tiesės atžvilgiu: 1) $M(1, -3)$, $2x-y+5=0$; 2) $M(0, 0)$, $3x-4y+5=0$; 3) $M(0, 3)$, $y=\sqrt{3}\,x+2$; 4) $M(-8, 12)$, tiesė eina per taškus $A(2, -3)$ ir $B(-5, 1)$; 5) $M(-2, 1)$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}$.

49. Raskite plotą kvadrato, kurio: 1) dvi kraštinės yra tiesėse $x-3y+5=0$ ir $2x-6y+13=0$; 2) viena kraštinė yra tiesėje $3x-4y+6=0$, o viršūnė taške $A(0, -1)$.

50. Sudarykite kampų tarp susikertančių tiesių pusiaukampinių lygtis: 1) $x-3y+5=0$ ir $3x-y-2=0$; 2) $x-2y-3=0$ ir $2x+4y+7=0$; 3) $x+y-1=0$ ir $x-y+10=0$; 4) $y=3x-4$ ir $2x+6y+3=0$; 5) $x-7y+5=0$ ir $x+y-3=0$.

51. Sudarykite lygtį apskritimo: 1) kurio centras $C(2, -3)$ ir spindulys $R=4$; 2) $C(-1, 0)$ ir $R=3$; 3) $C(-2, -5)$ ir $R=5$.

52. Sudarykite lygtį apskritimo, kuris eina per tašką M ir kurio centras C: 1) $M(-1, 3)$, $C(-2, 5)$; 2) $M(3, -2)$, $C(1, -2)$; 3) $M(-2, 0)$, $C(0, 3)$.

53. Sudarykite lygtį apskritimo: 1) kuris liečia ašį Oy ir kurio centras $C(-1, 3)$; 2) kuris liečia ašį Ox ir kurio centras $C(2, -1)$; 3) kuris liečia tiesę $\sqrt{3}\,x-y+6=0$ ir kurio centras $C(0, -2)$; 4) kuris liečia tiesę $x-2y+2\sqrt{5}=0$ ir kurio centras $C(2, 1)$.

54. Sudarykite lygtį apskritimo, kuris eina per taškus: 1) $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 4)$; 2) $A(-2, -6)$, $B(-3, 1)$, $C(4, 2)$; 3) $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$, $C(7, 5)$.

55. Raskite apskritimo centro koordinates ir spindulį: 1) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$; 2) $x^2+y^2+6x-7=0$; 3) $x^2+y^2-8y+12=0$.

56. Parašykite duotojo apskritimo liestinės taške P lygtį: 1) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$, $P(-1, 3)$; 2) $x^2+y^2=10$, $P(1, -3)$; 3) $x^2+y^2-6x-1=0$, $P(2, 3)$; 4) $x^2+y^2+4y=0$, $P(2, -2)$; 5) $x^2+y^2-2x+4y-24=0$, $P(-4, 0)$.

57. Sudarykite lygtį apskritimo: 1) kuris eina per taškus $A(-1, 0)$, $B(2, -3)$ ir kurio centras yra ašyje Ox; 2) kuris eina per taškus $A(0, 2)$, $B(3, -1)$ ir kurio centras yra ašyje Oy; 3) kuris eina per taškus $A(-8, 3)$, $B(2, -7)$ ir kurio centras yra tiesėje $x+4y+16=0$.

58. Parašykite lygtį tiesės, einančios per duotųjų apskritimų centrus: 1) $x^2+y^2-4x+2y-7=0$ ir $(x-3)^2+(y-2)^2=9$; 2) $x^2+y^2-7x+3=0$ ir $x^2+y^2+8y+6=0$; 3) $x^2+y^2-x+2y-10=0$ ir $x^2+y^2-4x-y-12=0$.

59. Raskite apskritimo ir koordinačių ašių susikirtimo taškus: 1) $x^2+y^2-4x-12=0$; 2) $x^2+y^2-4y+3=0$; 3) $x^2+y^2+12x-6y+40=0$.

60. Raskite apskritimo $x^2+y^2-9x+7y-24=0$ ir tiesės $x-y-1=0$ susikirtimo taškus.

61. Raskite apskritimo $x^2+y^2+8x+2y-8=0$ ir tiesės $4x+3y+19=0$ susikirtimo taškų koordinates.

62. Raskite elipsės viršūnių, židinių koordinates ir ekscentricitetą.

1) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$; 2) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $9x^2+64y^2=576$;

4) $x^2+9y^2=9$; 5) $9x^2+25y^2=1$.

63. Sudarykite lygtį elipsės, kurios: 1) pusašės lygios 4 ir 3; 2) didžioji ašis lygi 10, o atstumas tarp židinių $2c=8$; 3) mažoji ašis lygi 24, o atstumas tarp židinių $2c=10$; 4) atstumas tarp židinių $2c=6$ ir ekscentricitetas $\varepsilon=\frac{3}{5}$; 5) di-

džioji ašis lygi 18, o ekscentricitetas $\varepsilon=\frac{2}{3}$; 6) mažoji ašis lygi 16 ir ekscentricitetas $\varepsilon=\frac{3}{5}$; 7) židinių koordinatės $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ ir ekscentricitetas $\varepsilon=0{,}5$.

64. Raskite elipsės ekscentricitetą, jeigu atstumas tarp židinių lygus atstumui tarp didžiosios ir mažosios pusašės galų.

65. Raskite elipsės ekscentricitetą, jei: 1) mažoji ašis iš židinio matoma 60° kampu; 2) atstumas tarp židinių iš mažosios ašies galo matomas 90° kampu.

66. Sudarykite lygtį elipsės, kurios pusašių suma lygi 16, o atstumas tarp židinių $2c=16$.

67. Sudarykite lygtį elipsės, kurios ašių suma lygi 36 ir židiniai $F_1(-12, 0)$, $F_2(12, 0)$.

68. Sudarykite lygtį elipsės, einančios per taškus: 1) $A(4, 2\sqrt{2})$ ir $B(8, -\sqrt{5})$; 2) $A(-4, 4\sqrt{2})$ ir $B(6, 3\sqrt{3})$; 3) $A(6, 4)$ ir $B(8, 3)$.

69. Raskite elipsės ir tiesės susikirtimo taškus: 1) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$ ir $x+3y-9=0$; 2) $x^2+4y^2=100$ ir $x+y-5=0$; 3) $x^2+4y^2=25$ ir $x+2y-7=0$.

70. Sudarykite lygtį kreivės, kurios kiekvieno taško atstumas nuo tiesės $x+4=0$ yra 2 kartus didesnis už to taško atstumą nuo taško $F(-1, 0)$.

71. Sudarykite lygtį kreivės, kurios kiekvieno taško atstumo nuo taško $A(3, 0)$ ir atstumo nuo tiesės $x-12=0$ santykis lygus 0,5.

72. Sudarykite lygtį hiperbolės, kurios: 1) atstumas tarp viršūnių $2a=8$ ir atstumas tarp židinių $2c=10$; 2) viršūnės yra taškuose $A_1(-5, 0)$ ir $A_2(5, 0)$, o židiniai — taškuose $F_1(-8, 0)$ ir $F_2(8, 0)$; 3) realioji pusašė lygi 3 ir hiperbolė eina per tašką $M(6, 2\sqrt{3})$; 4) menamoji pusašė lygi 6 ir hiperbolė eina per tašką $M(8, 6)$; 5) menamoji ašis lygi 6 ir atstumas tarp židinių $2c=10$; 6) didžioji ašis lygi 20 ir asimptočių lygtys $y=\pm\frac{8}{5}x$; 7) židinys $F(-10, 0)$ ir asimptočių lygtys $y=\pm\frac{4}{3}x$; 8) menamoji ašis lygi 28 ir asimptočių lygtys $y=\pm\frac{7}{3}x$; 9) realioji pusašė $a=4$ ir ekscentricitetas $\varepsilon=\frac{5}{4}$; 10) menamoji pusašė $b=9$ ir ekscentricitetas $\varepsilon=2$; 11) atstumas tarp židinių $2c=14$ ir ekscentricitetas $\varepsilon=\frac{7\sqrt{6}}{12}$; 12) asimptotės $y=\pm\frac{3}{2}x$ ir hiperbolė eina per tašką $M(10, 12)$.

73. Sudarykite lygtį hiperbolės, einančios per du taškus $A(6, 5)$ ir $B\left(9, -\frac{5\sqrt{14}}{2}\right)$.

74. Raskite hiperbolės viršūnių ir židinių koordinates, ekscentricitetą ir kampą tarp asimptočių: 1) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$; 2) $9x^2-16y^2=144$; 3) $3x^2-y^2=81$.

75. Apskaičiuokite hiperbolės ekscentricitetą, jeigu kampas tarp asimptočių lygus: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

76. Duota hiperbolė $2x^2-5y^2=180$. Raskite jos susikirtimo taškus su tiesėmis: a) $x-5y=0$; b) $2x+y-18=0$.

77. Duota hiperbolė $9x^2-4y^2=36$. Raskite jos susikirtimo taškus su tiesėmis: a) $x-y+2=0$; b) $x-2y+2=0$.

78. Sudarykite lygtį parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių pradžioje ir: 1) židinys $F(3, 0)$; 2) židinys $F(0, 8)$; 3) židinys $F(-5, 0)$; 4) židinys $F(0, -4)$; 5) direktrisės lygtis $x+8=0$; 6) direktrisės lygtis $x-6=0$; 7) direktrisės lygtis $y+4=0$; 8) direktrisės lygtis $y-10=0$.

79. Raskite parabolės židinio koordinates ir direktrisės lygtį: 1) $y^2=3x$; 2) $y^2=-6x$; 3) $x^2=8y$; 4) $x^2=-10y$.

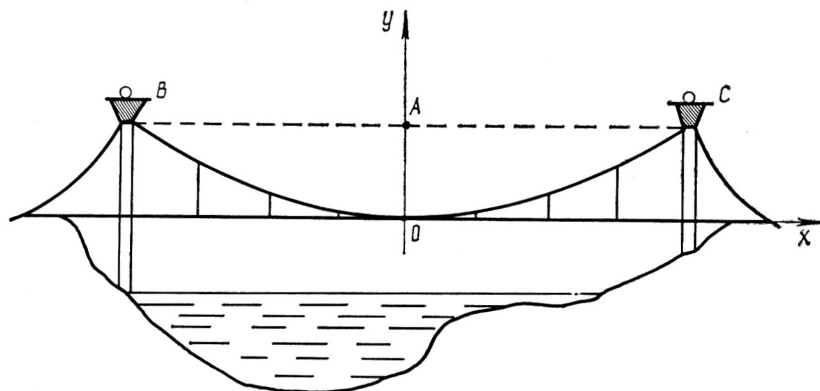
80. Sudarykite lygtį parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių pradžioje ir kuri simetriška ašies Ox atžvilgiu ir eina per tašką $A(4, 2\sqrt{3})$.

81. Parabolė eina per tašką $A(-1, 2)$, yra simetriška ašies Ox atžvilgiu, jos viršūnė $O(0, 0)$. Sudarykite parabolės lygtį.

82. Sudarykite lygtį parabolės, kuri eina per tašką $A(-2, 1)$, yra simetriška ašies Oy atžvilgiu ir kurios viršūnė yra koordinačių pradžioje.

83. Duota parabolė $y^2=16x$. Raskite jos susikirtimo taškus su tiesėmis: 1) $3x-y+1=0$; 2) $3x-2y+4=0$; 3) $4x-3y+9=0$; 4) $y+2=0$; 5) $x-4=0$.

84. Kabančiojo tilto lynas yra parabolės formos (286 pav.). Tilto ilgis $BC=20$ m, o lyno įlinkis $OA=30$ cm. Sudarykite parabolės lygtį paveiksle nurodytos koordinačių sistemos atžvilgiu.



286 pav.

85. Iš fontano trykštančio vandens srovė yra parabolės, kurios $p=0{,}2$, formos. Raskite srovės aukštį, jeigu vanduo krinta į baseiną 2 m atstumu nuo išsiveržimo vietos.

86. Iš pabūklo iššautas sviedinys skrieja parabole. Pasirinkę koordinačių sistemą, sudarykite sviedinio trajektorijos lygtį, jeigu jis nuo žemės pakyla į 1 km aukštį ir nukrenta už 8 km nuo pabūklo.

9.16. Atsakymai

1. $x-4=0$. **2.** $x^2+y^2=4$. **3.** 1) $x-y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $x-1=0$; 4) $y-2=0$; 5) $6x-4y-9=0$. **4.** 1) $x\pm a=0$; 2) $y\pm a=0$. **5.** B, D, E. **6.** 1, 0,2, -1, 0,6, 2. **7.** -2, 0, -4, 4, $\frac{2}{3}$. **8.** 1) $(4, 0)$, $(0, 3)$; 2) $(-5, 0)$, $(0, 2)$; 3) $(-5, 0)$, $(0, -4)$; 4) $(-5, 0)$, $(0, 3)$; 5) $(7, 0)$, $(0, 3)$. **10.** 1) $2x-3y-11=0$; 2) $3x-5y-7=0$; 3) $4x-3y-18=0$; 4) $x+1=0$; 5) $y-3=0$. **11.** $4x+y-9=0$, $x+y=0$, $x-3=0$. **12.** $3x-4y-11=0$, $4x+3y+2=0$. **13.** 1) $4x-y+12=0$; 2) $2x-3y+1=0$. **14.** 1) $9x+6y-65=0$; 2) $x-2y-1=0$; 3) $x-y-4=0$. **15.** $2x+3y-13=0$. **16.** 1) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}$; 2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}$; 3) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}$; 4) $y-1=0$; 5) $x+1=0$. **17.** $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$. **18.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}$, $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{2}$. **19.**

$y-5=0$, $3x+2y-1=0$, $3x-2y-5=0$. **20.** 1) $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-1}{1}$; 2) $\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}$; 3) $x-2=0$; 4) $y-3=0$; 5) $\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{3}$. **21.** 1) $2x+y-8=0$, $x+2y-1=0$, $x-y-1=0$; 2) $x-3=0$, $x+y-3=0$, $y=0$. **22.** $3x-5y+4=0$, $x+7y-16=0$, $3x-5y-22=0$, $x+7y+10=0$. **23.** 1) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$; 3) $\frac{x}{-10}+\frac{y}{4}=1$; 4) $\frac{x}{-8}+\frac{y}{-4}=1$; 5) $\frac{x}{3}+\frac{y}{9}=1$. **24.** $x+y+1=0$, $x-y-3=0$. **25.** $3x+7y-15=0$ ir $x-y+5=0$. **26.** $x-y+3=0$ ir $4x-y-3=0$. **27.** 1) $y=3x-11$; 2) $y=-2x+3$; 3) $y=2{,}5x+3{,}5$. **28.** 1) $y=x-2$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}-1$; 3) $y=\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}-1$; 4) $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1$; 5) $y=-x$. **29.** 1) $y=-2x+3$; 2) $y=3x+2$; 3) $y=2{,}5x-2$; 4) $y=-\frac{3}{4}x+5$; 5) $y=-\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}$. **30.** $k=-2{,}5$.
31. $3x-y-7=0$. **32.** $y=1{,}5x-2$; **33.** 1) 60°; 2) 135°; 3) 30°; 4) 120°. **34.** 1) kertasi taške $(-3, 3)$; 2) lygiagrečios; 3) kertasi taške $(3, -5)$; 4) kertasi taške $(-4, 5)$; 5) sutampa. **35.** 1) $\alpha=-0{,}5$; 2) $\alpha_1=-4$, $\alpha_2=4$; 3) $\alpha=-2{,}5$. **36.** 1) $m=9$; 2) $m=1{,}5$; 3) $m=-1{,}5$; 4) $m_1=-6$, $m_2=6$; 5) $m=0$. **37.** $(3, 0)$, $(0, -5)$, $(-2, 1)$. **38.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 29° 43′; 4) 74° 44′; 5) 30°. **39.** $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(-1, 7)$, $(1, 8)$. **40.** $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$; $3x+7y-10=0$. **41.** 1) $3\sqrt{5}$; 2) 26° 34′; 3) $y=2x+7$; 4) $x+2=0$; 5) $(-1, 5)$. **42.** $x-y=0$, $x-y-6=0$, $x+y+6=0$, $x+y-10=0$. **43.** $y=0$, $y+4=0$, $x+y=0$. **44.** 1) $4x-y-13=0$, $x-5=0$, $x+8y+5=0$; 2) $(5, -1{,}25)$; 3) 96° 55′; 4) $31x-16y-109=0$; 5) $\frac{\sqrt{65}}{4}$. **45.** 1) $C(6, -6)$; 2) $x-8y+26=0$, $x-6=0$, $x+2y+6=0$; 3) $y-2=0$, $2x-y-8=0$, $8x+y-42=0$; 4) $(5, 2)$; 5) 82° 52′ 30″. **46.** 1) 2; 2) 2; 3) 0; 4) 3; 5) $\sqrt{13}$. **47.** 1) 2,5; 2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; 3) 0,9; 4) 3; 5) $\frac{19}{\sqrt{20}}$. **48.** 1) $(-7, 1)$; 2) $(-1{,}2, 1{,}6)$; 3) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; 4) $(-16, -2)$; 5) $(0{,}4, -6{,}2)$. **49.** 1) $\frac{9}{40}$; 2) 4. **50.** 1) $4x-4y+3=0$, $2x+2y-7=0$; 2) $4x+1=0{,}8y+13=0$; 3) $x=-4{,}5$, $y=5{,}5$; 4) $8x+4y-5=0$, $4x-8y-11=0$; 5) $3x-y-5=0$, $x+3y-5=0$. **51.** 1) $(x-2)^2+(y+3)^2=16$; 2) $(x+1)^2+y^2=9$; 3) $(x+2)^2+(y+5)^2=25$. **52.** 1) $(x+2)^2+(y-5)^2=5$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; 3) $x^2+(y-3)^2=13$. **53.** 1) $(x+1)^2+(y-3)^2=1$; 2) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$; 3) $x^2+(y+2)^2=16$; 4) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$. **54.** 1) $(x-1{,}5)^2+(y-2)^2=6{,}25$; 2) $(x-7)^2+(y+5)^2=100$; 3) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$. **55.** 1) $C(2, -3)$, $R=2$; 2) $C(-3, 0)$, $R=4$; 3) $C(0, 4)$, $R=2$. **56.** 1) $3x-4y+15=0$; 2) $x-3y-10=0$; 3) $x-3y+7=0$; 4) $x-2=0$; 5) $5x-2y+20=0$. **57.** 1) $(x-2)^2+y^2=9$; 2) $x^2+(y+1)^2=9$; 3) $(x+4)^2+(y+3)^2=52$. **58.** 1) $3x-y-7=0$; 2) $8x-7y-28=0$; 3) $2x-2y-3=0$. **59.** 1) $(-2, 0)$, $(6, 0)$, $(0, -2\sqrt{3})$, $(0, 2\sqrt{3})$; 2) $(0, 1)$, $(0, 3)$; 3) koordinačių ašys apskritimo nekerta. **60.** $(-3, -4)$, $(5, 4)$. **61.** $(-1, -5)$, $(-7, 3)$. **62.** 1) viršūnės — $(\pm 12, 0)$, $(0, \pm 9)$; židiniai — $(\pm\sqrt{63}, 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{63}}{12}$; 2) viršūnės — $(\pm 9, 0)$, $(0, \pm 3)$; židiniai — $(\pm\sqrt{72}, 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{72}}{9}$;

3) viršūnės — $(\pm 8, 0)$, $(0, \pm 3)$; židiniai — $(\pm\sqrt{53}, 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{53}}{8}$; 4) viršūnės — $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 1)$; židiniai — $(\pm\sqrt{8}, 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{8}}{3}$; 5) viršūnės — $(\pm\frac{1}{3}, 0)$, $(0, \pm\frac{1}{5})$; židiniai — $(\pm\frac{4}{15}, 0)$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$. **63.** 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$; 6) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; 7) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **64.** $\varepsilon=\sqrt{0,4}$. **65.** 1) $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **66.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **67.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. **68.** 1) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$; 3) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. **69.** 1) $(9, 0)$, $(0, 3)$; 2) $(0, 5)$, $(8, 3)$; 3) $(4; 1,5)$, $(3, 2)$. **70.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **71.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

72. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$; 3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; 4) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 6) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{256}=1$; 7) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 8) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{196}=1$; 9) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 10) $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{81}=1$; 11) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=1$; 12) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{81}=1$. **73.** $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{25}=1$. **74.** 1) $(\pm 7, 0)$, $(0, \pm 5)$, $(\pm\sqrt{74}, 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{74}}{7}$, $71°\,5'$; 2) $(\pm 4, 0)$, $(0, \pm 3)$, $(\pm 5, 0)$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $73°\,44'$, 3) $(\pm 3\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm 9)$, $(\pm 6\sqrt{3}, 0)$, $\varepsilon=2$, $120°$. **75.** 1) $\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\varepsilon=\sqrt{2}$; 3) $\varepsilon=2$. **76.** 1) $(10, 2)$, $(-10, -2)$; 2) $(10, -2)$. **77.** 1) $(-2, 0)$, $(5,2;\ 7,2)$; 2) $(-2, 0)$, $(2,5;\ 2,25)$. **78.** 1) $y^2=12x$; 2) $x^2=32y$; 3) $y^2=-20x$; 4) $x^2=-16y$; 5) $y^2=32x$; 6) $y^2=-24x$; 7) $x^2=16y$; 8) $x^2=-20y$. **79.** 1) $F(\frac{3}{4}, 0)$, $x=-\frac{3}{4}$; 2) $F(-\frac{3}{2}, 0)$, $x=\frac{3}{2}$; 3) $F(0, 2)$, $y+2=0$; 4) $F(0, -\frac{5}{2})$, $y-\frac{5}{2}=0$.

80. $y^2=3x$. **81.** $y^2=-4x$. **82.** $x^2=4y$. **83.** 1) $(1, 4)$, $(\frac{1}{9}, \frac{4}{3})$; 2) $(4, 8)$, $(\frac{4}{9}, \frac{8}{3})$; 3) $(\frac{9}{4}, 6)$; 4) $(\frac{1}{4}, -2)$; 5) $(4, 8)$, $(4, -8)$. **84.** $3x^2=100y$. **85.** $h=2,5$ m.

86. $x^2=32y$.

TURINYS

Godvaiša B. ir kt.

Go-51 Matematika: Vadovėlis spec. vid. m-klų moksleiviams / B. Godvaiša, R. Šileikienė, J. Šinkūnas.— V.: Mokslas, 1992— .

D. 1.— 381 p.: iliustr.

Vadovėlio pirmojoje dalyje pateikiamas algebros ir elementariųjų funkcijų kursas. Dėstymas siejamas su skaičiavimo technikos panaudojimu, duodama praktinio pobūdžio uždavinių, parodomas kiekvienos temos būdingiausių uždavinių sprendimas. Skiriama specialiųjų vidurinių mokyklų moksleiviams, kurie eina 300 arba 380 val. matematikos kursą.

UDK 512(075.32)

Mokymo leidinys. Boleslovas **Godvaiša,** Regina **Šileikienė,** Juozas **Šinkūnas.** MATEMATIKA. D. 1. Redaktorė E. Leikauskienė. Viršelio dailininkas V. Kudaba. Meninis redaktorius V. Ajauskas. Techninė redaktorė A. Gineitienė. Korektorės: A. Sidarkevičienė ir N. Semionova

Duota rinkti 1991 01 11. Pasirašyta spaudai 1992 07 29. SL 256. Formatas $60\times90^1/_{16}$. Popierius — spaudos Nr. 2. Garnitūra — literatūrinė, 10 punktų. Iškilioji spauda. 24 sąl. sp. l. 24,37 sąl. spalv. atsp. 25,83 apsk. leid. l. Tiražas 4000 egz. Užsakymas 380. Kaina sutartinė. Leidykla „Mokslas", 2050 Vilnius, Žvaigždžių 23. Spaudė „Vilties" spaustuvė, 2600 Vilnius, A. Strazdelio 1.